Л. В. АВИЛОВА, Л. В. ДОЛГОВА, М. А. ПРИХОДЬКО

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОМСК 2021

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Л. В. Авилова, Л. В. Долгова, М. А. Приходько

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ:
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Утверждено методическим советом университета

Омск 2021

УДК 519.2(076.5)
ББК 22.171я73
А20

Практикум по математике: теория вероятностей / Л. В. Авилова, Л. В. Долгова, М. А. Приходько; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2021. 38 с.

Практикум содержит задачи по основным темам раздела «Теория вероятностей». По каждой теме даны краткие теоретические сведения, приведены основные формулы, набор задач и проверочный тест.

Предназначен для работы на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов 1-го, 2-го курсов всех форм обучения.

Библиогр.: 4 назв. Рис. 3. Прил. 2.

Рецензенты: канд. пед. наук, доцент Н. В. Щукина;
канд. физ.-мат. наук, доцент Ю. М. Сосновский.

© Омский гос. университет путей сообщения, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

«Значение математики сейчас непрерывно возрастает. В математике рождаются новые идеи и методы. Все это расширяет сферу ее приложения. Сейчас уже нельзя назвать такой области деятельности людей, где математика не играла бы существенной роли. Она стала незаменимым орудием во всех науках о природе, в технике, в обществоведении». В этих словах академика А. Д. Александрова ярко выражена мысль о значимости математики, о ее проникновении в другие науки.

Настоящий практикум предназначен для практических занятий со студентами 1-го и 2-го курсов и охватывает основные положения теории вероятностей. Каждый раздел включает в себя краткие теоретические сведения, основные формулы. Предлагаемые задачи разделены по сложности на два уровня. По каждой теме составлен проверочный тест. Предлагается список рекомендованной литературы.

Пособие может быть использовано на аудиторных занятиях, а также для организации самостоятельной работы обучающихся, при выполнении домашних заданий, подготовке к проверочным работам.

Авторы надеются, что представленная работа будет полезна как обучающимся, так и преподавателям.

1. КОМБИНАТОРИКА

1.1. Элементы комбинаторики

Справочный материал

В блок-схеме на рис. 1.1 приведены формулы для вычисления количества комбинаций.

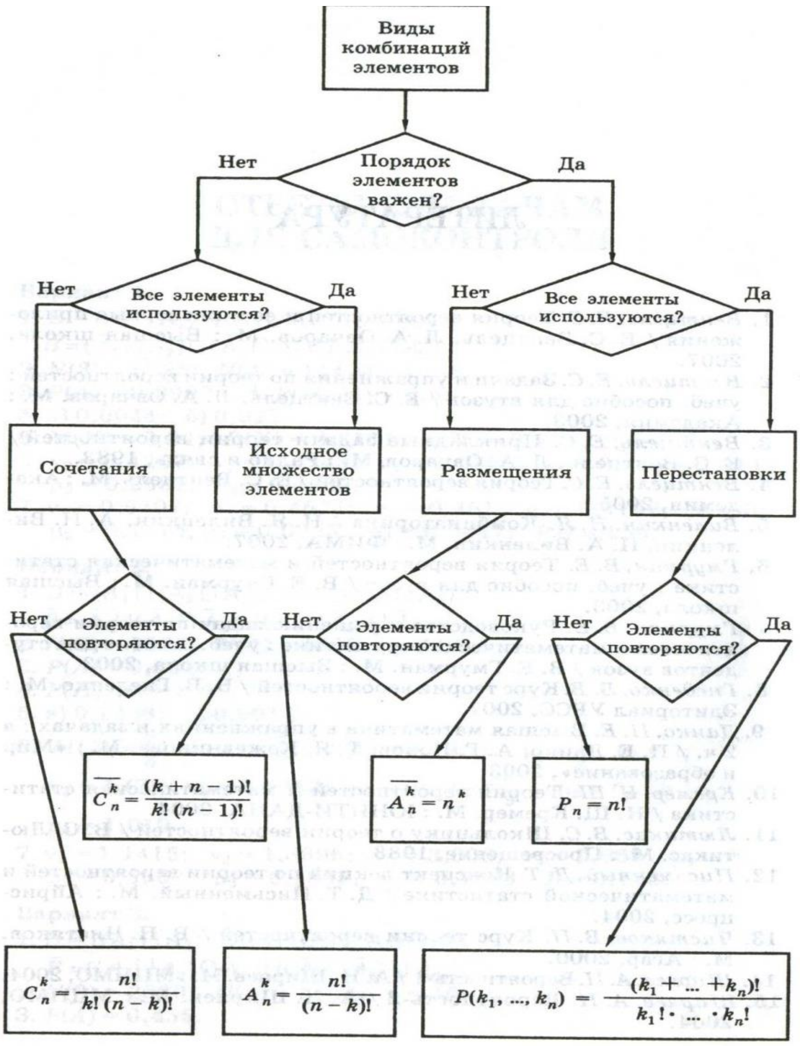

Рис. 1.1. Блок-схема «Комбинаторика»

Замечание.

1) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$; 2) $0! = 1$, $1! = 1$; 3) $C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1$; 4) $C_n^1 = n$.

Размещениями из n различных элементов по m элементов называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n

элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их следования.

Обозначение. A_n^m – число размещений из n элементов по m элементов.

Перестановками из n различных элементов называются размещения из n элементов по n элементов.

Обозначение. P_n – число перестановок из n элементов.

Сочетаниями из n различных элементов по m элементов называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой хотя бы одним элементом.

Обозначение. C_n^m – число сочетаний из n элементов по m элементов.

Замечание. При решении комбинаторных задач необходимо обращать внимание на несколько моментов, которые не всегда явно оговариваются в условии:

1) при составлении выборок – упорядочиваем ли мы обьекты или нет, т. е. различаем ли мы места, на которые ставим обьекты;

2) при распределении объектов по выборкам – считаем ли мы эти выборки одинаковыми (равноценными) или нет.

Задачи

Уровень I

1. Установить соответствие:

1) A_6^2	а) 120
2) P_4	б) 5040
3) C_{10}^3	в) 30
4) A_{10}^4	г) ?
5) C_6^2	д) 24

2. Решить уравнение:

а) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$; б) $\frac{12}{7}C_{x+1}^{x-1} = A_x^3$; в) $C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15}A_{x+1}^3$; г) $5 \cdot C_n^3 = C_{n+2}^4$.

3. На железнодорожной станции имеется шесть запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них четыре поезда?

4. Сколькими различными способами собрание, состоящее из 40 человек, может выбрать среди присутствующих председателя собрания, его заместителя и секретаря?

5. Анкета по изучению общественного мнения содержит 10 вопросов, на каждый из которых отвечающий дает один из трех ответов: «да», «нет», «не знаю». Найти число всех различных способов заполнения анкеты.

6. В колоде 32 карты. Выбирают три карты. Сколько вариантов появления ровно одной дамы среди трех выбранных карт?

7. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке пять человек?

8. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток? Сколькими способами можно купить восемь открыток? Сколькими способами можно купить восемь различных открыток?

9. Сколько может быть случаев при выборе двух карандашей и трех ручек из пяти различных карандашей и пяти различных ручек?

10. Сколькими способами пять разных воробьев могут разместиться на четырех ветках, если на одной ветке может быть несколько воробьев?

11. В урне лежат жетоны с числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Из нее вынимают три жетона. Во скольких случаях сумма написанных на них чисел будет равна девяти? Не меньше девяти?

12. При встрече девять человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего рукопожатий было сделано?

13. Имеются красные, белые и желтые розы по шесть штук каждого вида. Случайным образом выбирают три розы. Сколько существует способов появления в таком букете хотя бы одной красной розы?

14. 20 студентов обменялись фотографиями. Сколько фотографий потребовалось для этого обмена?

15. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

16. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2?

17. Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что все они экзамен сдали?

18. Замок открывается только в том случае, если набран определенный трехзначный номер. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти цифр. Угадать номер удалось только из последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

19. Имеется восемь пар перчаток различных размеров. Сколько способов существует для выбора одной перчатки на левую руку и одной на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?

20. Для участия в команде тренер отбирает пять студентов из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если Андрей и Сергей должны войти в команду?

21. Пять человек вошли в лифт на первом этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами они могут выйти из лифта на нужных этажах?

Уровень II

1. Сколькими способами из колоды карт в 36 листов можно выбрать неупорядоченный набор из пяти карт так, чтобы в этом наборе были бы точно один валет, две дамы и три бубновых карты?

2. Рассмотрим буквы фразы «зуб за зуб». Сколько различных трехбуквенных слов можно составить из букв этой фразы?

3. На собрании должны выступить четыре докладчика: A, B, C и D, причем B не может выступить раньше A. Сколькими способами можно установить их очередность?

4. Сколькими способами можно сформировать железнодорожный состав из девяти вагонов так, чтобы 2-й и 4-й вагоны шли через один?

5. 30 человек разбиты на три группы по 10 человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

6. 10 групп занимаются в 10 расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы № 1 и № 2 находились бы в соседних аудиториях?

7. Сколько существует шестизначных чисел с тремя четными и тремя нечетными цифрами?

8. Сколькими способами можно расселить девять студентов в трех комнатах, рассчитанных на трех каждая, если два из этих студентов отказываются поселиться вместе?

9. Найдите число прямоугольников, составленных из клеток шахматной доски, которые содержат клетку с координатами (p, q). Для какой клетки это число наибольшее, а для какой – наименьшее?

Задания для самопроверки
(тест)

1. Значение выражения $\frac{A_n^2}{P_2} - C_n^{n-2}$ равно…

1) 3; 2) 1; 3) 0; 4) –2; 5) 11.

2. Корень уравнения $C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15} A_{x+1}^3$ или их сумма равна …

1) 10; 2) 5; 3) –5; 4) 15; 5) 4.

3. Значение выражения $C_5^3 \cdot (P_4 - \overline{A_2^3}) + 5!$ равно…

1) 215; 2) 250; 3) 280; 4) 200; 5) 295.

4. В зале 10 мест. Сколькими способами можно разместить пять зрителей в этом зале?

1) 2; 2) 5; 3) 500; 4) 30240; 5) 10520.

5. Сколько словарей надо издать, чтобы делать переводы с любого из пяти языков на любой другой язык (русский, английский, немецкий, французский, итальянский)?

1) 20; 2) 40; 3) 50; 4) 60; 5) 25.

6. В ящике 13 зеленых, 10 красных и семь синих одинаковых на ощупь шариков. Сколько существует способов выбрать три зеленых, два красных и три синих шарика?

1) 3603600; 2) 360360; 3) 3606300; 4) 3603000; 5) 6303600.

7. Сколько различных двузначных чисел можно составить, используя цифры 2, 3 и 5, если цифры могут повторяться?

1) 6; 2) 9; 3) 12; 4) 15; 5) 10.

8. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от одного до 30 три натуральных числа так, чтобы их сумма была четной?

1) 256: 2) 3020; 3) 600; 4) 2030; 5) 1000.

9. Сколькими способами можно составить набор из трех тортов, если в магазине имеется семь видов тортов?

1) 21; 2) 84; 3) 10; 4) 36; 5) 7.

10. Сколько «слов» можно составить из слова «трактат»?

1) 360; 2) 90; 3) 410; 4) 7; 5) 150.

2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

2.1. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность. Гипергеометрическая вероятность

Справочный материал

Испытание (опыт) – осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее событие. *Событие* – возможный результат опыта.

Событие называют *достоверным* в данном испытании, если оно обязательно произойдет в результате испытания.

Событие называют *невозможным* в данном испытании, если заранее известно, что оно не может произойти в результате испытания.

Событие называют *случайным* в данном испытании, если оно может произойти или не произойти в результате испытания (т. е. до проведения испытания невозможно предугадать, произойдет событие или нет).

События A и B называют *совместными*, если они могут произойти одновременно в результате одного испытания.

События A и B называют *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в результате одного испытания.

Два события – A и $\overline{A}$ (читают «А с чертой») – называют *противоположными*, если одно из них обязательно должно произойти в данном испытании, но наступление одного исключает возможность наступления другого.

Если события противоположны, то они несовместны (обратное в общем случае неверно).

События называют *равновозможными* в одном испытании, если в этом испытании нет оснований предполагать, что одно из них может произойти предпочтительнее, чем другое.

Событие A называют *благоприятствующим* событию B, если появление события A означает также появление события B.

События A, B, C, … называют *элементарными*, если они попарно несовместны и только одно из них может наступить в результате испытания.

Замечание. Множество всех элементарных для данного опыта событий образуют *полную группу событий.*

Суммой двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Обозначение: $A+B$.

Произведением двух событий называют событие, состоящее в одновременном их появлении. Обозначение: $A \cdot B$ или *AB*.

Замечание. Аналогично определяются сумма и произведение в случае большего числа событий.

Вероятность – числовая характеристика возможностей появления случайного события в определенных условиях, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз.

Классическое определение вероятности: *вероятностью события A* называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу n всех равновозможных, образующих полную группу элементарных исходов опыта. Обозначение: $P(A)$ – вероятность события A.

$$P(A) = \frac{m}{n}\cdot$$

Геометрическая вероятность: *геометрической вероятностью* события A называется отношение меры области (g), благоприятствующей появлению события, к мере всей области (G).

$$P(A) = \frac{mesg}{mesG}.$$

Гипергеометрическая вероятность: если из некоторого количества n элементов, среди которых n_1 элементов первого типа и n_2 – второго, извлечены k элементов $(k < n)$, то вероятность того, что среди извлеченных k элементов ровно k_1 первого типа, определяется по формуле

$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2}}{C_n^k}.$$

Задачи

Уровень I

1. Определить, достоверным, невозможным или случайным является событие: *A* – «два попадания при трех выстрелах»; *B* – «появление не более 18 очков при бросании трех игральных кубиков»; *C* – «наугад выбранное трехзначное число не больше 1000»; *D* – «появление девяти очков при бросании двух игральных кубиков»; *E* – «появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного девяти числа при случайном однократном наборе указанных цифр»;

K – «появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного трем числа при произвольном однократном наборе указанных цифр». Определить вероятности появления событий *B, D, E, K.*

2. Из 100 билетов выигрышными являются 10. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу двух билетов оба выигрышные; один выигрышный.

3. Студент подготовил к экзамену 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных вопросов он знает все вопросы; знает только два вопроса?

4. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой: 1) три карточки; 2) все шесть карточек. Какова вероятность того, что в первом случае получится слово «тор», а во втором – слово «теория»?

5. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит семи; на обеих костях выпадет одинаковое число очков.

6. На пяти карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4, 5. Наугад отбирают две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше, чем число на первой?

7. Слово «машина» составлено из букв разрезной азбуки. Определить вероятность того, что при произвольном извлечении без возвращения четырех букв в порядке их выхода образуется слово «шина».

8. В урне находится 16 шаров, имеющих номера 1, 2, 3, …, 16. Наудачу извлечены пять шаров. Определить вероятность того, что среди извлеченных шаров окажутся шары с номерами 1 и 2.

9. На 10 из 20 карточек написана цифра «1», на остальных – «0». Пять карточек вынимают наугад. Найти вероятность того, что на двух карточках будет стоять «1», а на остальных – «0» (неважно, в каком порядке).

10. Из шести алмазов в подвеске два были поддельными. При ограблении исчезло три алмаза. Какова вероятность того, что среди них лишь один поддельный алмаз?

11. Для уменьшения общего количества игр на соревнованиях 16 волейбольных команд разбиты на две подгруппы. Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в одной подгруппе; в разных подгруппах.

12. Найти вероятность того, что трехзначный номер случайно встреченного автомобиля состоит из одинаковых цифр.

13. На отрезке [0; 2] наугад выбраны два числа: x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенству $x^2 \le 4y \le 4x$.

14. Коля и Петя договорились встретиться на остановке между девятью и десятью часами. Каждый, придя на остановку, ждет другого 15 минут и уходит. Найти вероятность их встречи.

Уровень II

1. Множество Е состоит из 10 первых букв алфавита. Сколько четырехбуквенных слов можно составить? Какова вероятность того, что случайно составленное слово будет оканчиваться буквой «а»?

2. Числа 1, 2, 3, …, 9 записывают в случайном порядке. Каковы вероятности событий:

а) числа будут записаны в порядке возрастания; б) числа 1 и 2 будут стоять рядом в порядке возрастания; в) числа 3, 6, 9 будут стоять рядом?

3. В первом ящике находятся шары с номерами от одного до пяти, а во втором – с номерами от шести до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров на них не больше 11?

4. Найти вероятность того, что при формировании железнодорожного состава из девяти вагонов 2-й и 4-й вагоны будут стоять через один?

5. Пустые горшочки с медом Винни-Пух ставит на полочку вместе с полными для того, чтобы вид уменьшающегося числа горшков не слишком портил ему настроение. В настоящий момент в Пуховом буфете вперемежку стоят пять горшочков с медом и шесть абсолютно пустых. Какова вероятность того, что в двух взятых на ужин горшочках окажется мед?

2.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Справочный материал

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т. е. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (формула справедлива и для конечного числа *n* слагаемых).

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице, т. е. $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице ($P(A)+P(\overline{A})=1$), таким образом, $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Два события называются *независимыми*, если появление любого из них не изменяет вероятности появления другого.

Вероятность события *B*, вычисленная в предположении, что событие *A* уже наступило, называют *условной вероятностью* события *B*.

Обозначение. $P_A(B)$ или $P(B/A)$ – условная вероятность события *B*.

*Теорема***.** Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило: $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)$.

Если события *A* и *B* независимы, то $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Если события *A* и *B* несовместны, то *P(AB)* = 0.

Если события $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$ независимые, то вероятность *P* появления хотя бы одного из них определяется по формуле $P=1-P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}\right)$.

Задачи

Уровень I

1. Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятности поражения мишени для каждого из орудий соответственно равны 0,85 и 0,91. Найти вероятности событий: что оба орудия поразят мишень; мишень не будет поражена; мишень будет поражена.

2. В клетке семь белых и пять серых мышей. Случайно отбираем три мыши, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что все три мыши серые.

3. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что на первом кубике выпадет четное число очков, а на втором – число очков, меньшее шести?

4. Вероятность своевременного выполнения студентом типовых расчетов по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения студентом типовых расчетов по двум дисциплинам.

5. Среди одинаковых по внешнему виду 11 изделий находится четыре бракованных. Произвольно вынимают три изделия. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно бракованное.

6. На 20 одинаковых жетонах написано 20 двузначных чисел от 11 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным семи или четырем?

7. В коробке девять одинаковых радиоламп, три из которых были в употреблении. В течение рабочего дня мастеру для ремонта аппаратуры пришлось взять две радиолампы. Какова вероятность того, что обе взятые лампы были в употреблении?

8. Прибор состоит из двух дублирующих друг друга элементов. Вероятность безотказной работы первого 0,85, второго – 0,72. Определить вероятность безотказной работы прибора.

9. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в установленное место, соответственно равны 0,8; 0,4; 0,7. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться двум из трех друзей.

10. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

11. При подготовке к экзамену четыре студента подготовили по 80 % материала. Найти вероятность того, что все четверо сдадут экзамен; ни один не сдаст экзамен; экзамен сдадут только трое; экзамен сдаст хотя бы один из студентов.

12. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить три бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4.

13. В трех залах кинотеатра идут три различных фильма. Вероятность того, что на определенный час в кассе первого зала есть билеты, равна 0,3, в кассе второго зала – 0,2, а в кассе третьего зала – 0,4. Какова вероятность того, что на данный час имеется возможность купить билет хотя бы на один фильм; только на один фильм?

14. В пачке 10 тетрадей, восемь из которых в клетку. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу двух тетрадей есть хотя бы одна в клетку.

Уровень II

1. Вероятность одного попадания в цель при залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

2. Вероятность попадания в движущуюся цель при одном выстреле постоянна и равна 0,05. Сколько необходимо сделать выстрелов для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,75, иметь хотя бы одно попадание?

3. Какова должна быть вероятность изготовления изделия, удовлетворяющего стандарту, чтобы с вероятностью, равной 0,9, можно было бы утверждать, что среди 20 изготовленных изделий хотя бы одно не удовлетворяет стандарту?

2.3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Справочный материал

Событие A может произойти тогда и только тогда, когда произойдет одно из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу. Поскольку заранее неизвестно, которое из событий $H_1, H_2, ..., H_n$ наступит, их называют *гипотезами (*или *шансами).*

Если установлены вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности события A, т. е. $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), ..., P_{H_n}(A),$ то вероятность события A вычисляется по **формуле полной вероятности**: $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) +$ $+ P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$.

Вероятности гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ после опыта в предположении, что в результате опыта наступило событие A (**формулы Байеса**):

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}.$$

Задачи

Уровень I

1. Имеется три урны с шарами. В первой урне четыре белых и пять черных, во второй – пять белых и четыре черных, в третьей – шесть белых шаров. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что: а) шар белый; б) белый шар вынут из второй урны.

2. Партия электрических лампочек на 20 % изготовлена первым заводом, на 30 % − вторым, на 50 % − третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны 0,01; 0,005; 0,006. Найти вероятность того, что: а) наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной; б) первая попавшаяся стандартная лампочка изготовлена на первом или втором заводах.

3. На двух станках изготавливают одинаковые детали. Известно, что производительность первого станка в два раза больше второго, а вероятность изготовления детали высшего качества на первом станке равна 0,9, а на втором – 0,81. Изготовленные за смену не рассортированные детали находятся на складе. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется высшего качества.

4. Студент знает 24 вопроса из 30. В каком случае вероятность вытянуть счастливый билет для него больше: если он идет сдавать экзамен первым или вторым?

5. В тире имеется три вида винтовок: три – первого типа, четыре – второго типа, три – третьего типа. Вероятность попадания в цель из винтовок первого типа 0,9, второго типа – 0,85, третьего типа – 0,65. После выстрела из винтовки, выбранной наудачу, цель была поражена. Какова вероятность того, что выстрел был сделан из винтовки третьего типа?

6. В студенческой группе 70 % составляют юноши. 80 % юношей и 70 % девушек принесли на занятие микрокалькуляторы. После занятий в аудитории обнаружили забытый кем-то микрокалькулятор. Какова вероятность того, что он принадлежал: а) юноше; б) девушке?

Уровень II

1. Техническое устройство выйдет из строя, если откажут не менее двух из трех независимо работающих элементов. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2; 0,4; 0,3. Известно, что устройство отказало. Найти вероятности того, что отказали 1-й и 2-й элементы.

2. В корзине шесть грибов: груздей или белых, причем все гипотезы о числе белых грибов равновероятны. Из корзины взяли один гриб, оказавшийся белым. Какова вероятность того, что в корзине осталось еще три белых гриба?

3. В первой урне 10 шаров, из них восемь белых; во второй урне 20 шаров, из них четыре белых. Из каждой урны извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

4. В каждой из трех урн содержится шесть черных и четыре белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

5. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит заправка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К заправке подъехала машина. Что вероятнее: подъехала грузовая или легковая машина?

2.4. Повторные независимые испытания. Схема Бернулли

Справочные материалы

Повторными независимыми называются испытания, удовлетворяющие условиям:

1) количество испытаний n конечно;

2) вероятность появления случайного события A в каждом из испытаний постоянна и равна p.

Серия повторных независимых испытаний называется **схемой Бернулли.**

Вероятность того, что событие A произойдет ровно m раз в n испытаниях вычисляется **по формуле Бернулли**:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \quad \text{или} \quad P_n(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}, \text{ где } q=1-p.$$

Если вероятность p наступления события в каждом испытании постоянна и близка к 0 (p < 0,1), а число n независимых испытаний достаточно велико, причем выполняется условие $np=a-\text{const}$, где $0<a<10$, то применяется **формула Пуассона:**

$$P_n(m)\approx\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}.$$

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, $0{,}1<p<1$ (p не близка к 0), а число n независимых испытаний достаточно велико, то вероятность

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}})$$ – **формула Муавра – Лапласа.**

Так как $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, то $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$.

Если вероятность p события A в каждом испытании постоянна ($0 < p < 1$), то вероятность

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ где } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

или $P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Наивероятнейшим называют такое число (m_0) появлений события A, вероятность которого наибольшая.

Наивероятнейшее число m_0 появлений события A можно вычислить по формуле $np - q \le m_0 \le np + p$.

Задачи

Уровень I.

1. В квартире четыре электролампочки. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна 5/6. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить: 1) только одну лампочку; 2) не меньше половины лампочек; 3) хотя бы одну лампочку?

2. Агрегат содержит 5000 деталей. Вероятность отказа детали за время работы равна 0,001. Найти вероятность того, что за время работы ни одна деталь не откажет.

3. Вероятность того, что сошедшая с конвейера деталь стандартная, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей ровно 356 окажутся стандартными.

4. Вы играете с равным по силе партнером. Чего следует больше ожидать: три победы в четырех партиях или пять побед в восьми партиях?

5. По данным телевизионного ателье в течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 12 % кинескопов. Какова вероятность того, что из 156 выбранных наугад кинескопов 146 проработают гарантийный срок?

6. Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определенная микросхема. Вероятность ее отказа в течение 1 ч работы устройства равна 0,004. Какова вероятность того, что за 100 ч работы устройства придется пять раз менять микросхему?

7. Вероятность того, что студент опоздает на занятие, равна 0,1. Найти наивероятнейшее число опоздавших из 150 студентов и соответствующую этому числу вероятность.

8. Вероятность того, что сошедшая с конвейера деталь стандартная, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей не менее 356 окажутся стандартными.

9. Известно, что при контроле бракуется 10 % изделий. На контроль отобрано 625 изделий. Какова вероятность того, что среди отобранных не менее 550 и не более 575 стандартных изделий?

10. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,004. Какова вероятность того, что из 750 проверяемых изделий более трех изделий не выдержит испытаний?

Уровень II

1. Вероятность забросить мяч в корзину для баскетболиста равна 2/3. Сколько нужно сделать бросков, чтобы с вероятностью не менее 0,95 быть уверенным в том, что мяч хотя бы один раз окажется в корзине?

2. Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,8. Сколько вылечившихся из 100 больных можно ожидать с вероятностью 0,75?

3. Садоводческий кооператив застраховал на год свои дачные дома от пожара. Каждый из 600 домовладельцев внес по 150 рублей. Вероятность пожара (в одном доме) в течение года равна 0,005, а страховая сумма, выплачиваемая пострадавшему, составляет 12 000 рублей. Какова вероятность того, что страховая компания понесет убыток?

Задания для самопроверки
(тест)

1. Из колоды игральных карт в 36 листов наудачу вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта черной масти, если предположить, что все исходы в опыте равновозможные?

1) 0,5; 2) 1; 3) 0, 25; 4) 0; 5) 0,75.

2. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет не менее пяти очков, равна...

$1)\frac{5}{6};\ 2)\frac{1}{6};\ 3)\frac{1}{2};\ 4)\frac{1}{3};\ 5)\frac{2}{3}.$

3. В ящике лежат два белых и три черных шара и из него вынут один шар. Вероятность того, что он белый, равна …

$1)\ \frac{1}{2};\ 2)\ \frac{2}{3};\ 3)\ \frac{2}{5};\ 4)\ \frac{5}{2};\ 5)\ \frac{3}{5}.$

4. Среди 17 студентов группы, из которых восемь девушек, разыгрывается семь билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется четыре девушки?

1) 0,302; 2) 0,306; 3) 0,023; 4) 0,30; 5) 0,503.

5. Вероятность того, что будет продана стеклянная ваза, равна 0,8, что керамическая – 0,4. Найти вероятность того, что обе вазы проданы не будут.

1) 0,32; 2) 0,78; 3) 0,12; 4) 0,48; 5) 0,16.

6. В коробке пять простых и шесть цветных карандашей. Вероятность того, что два извлеченных карандаша будут простыми, равна…

$1)\frac{1}{5};\ 2)\frac{2}{9};\ 3)\frac{2}{11};\ 4)\frac{47}{55};\ 5)\frac{30}{121}.$

7. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,4; второй – 0,7; третий – 0,3. Стрелки дают по одному выстрелу по цели. Какова вероятность, что цель поражена, если для этого достаточно одного попадания?

1) 0,7; 2) 0,3; 3) 0,13; 4) 0,87; 5) 0,2.

8. Имеются две урны с шарами, в первой находится три белых и четыре черных шара, во второй – два белых и три черных. Из наудачу выбранной урны вынимают один шар. Какова вероятность, что он белый?

1) $\frac{29}{70}$; 2) $\frac{20}{93}$; 3) $\frac{8}{11}$; 4) $\frac{37}{65}$; 5) $\frac{28}{91}$.

9. Партия деталей содержит 2 % бракованных. Какова вероятность, что среди 150 деталей, выбранных наудачу, будет пять бракованных?

1) 0,3; 2) 0,21; 3) 0,12; 4) 1,13; 5) 0,02.

10. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 70 %. Найти наивероятнейшее число всхожих семян в партии из 240 семян.

1) 168; 2) 150; 3) 130; 4) 200; 5) 174.

3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1. Дискретные случайные величины (ДСВ). Основные распределения ДСВ

Справочный материал

Случайной называют переменную величину, которая может принимать в результате опыта единственное значение из множества всех возможных значений, заранее (до проведения опыта) не известное.

Дискретной называют случайную величину, которая может принимать отдельные изолированные значения с определенными вероятностями.

Закон распределения – соответствие, устанавливающее связь между всеми значениями x_i случайной величины и соответствующими вероятностями p_i.

Функция распределения вероятностей (интегральная функция распределения) случайной величины X – функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше, чем x,

$$F(x) = P(X < x).$$

Для дискретной случайной величины, которая может принимать значение $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k).$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений этой величины на соответствующие вероятности их появления. *Обозначение:* $M(X)$ – математическое ожидание случайной величины X.

$$M(X) = \sum_{i=i}^{n} x_i \cdot p_i,$$

где x_i – значение случайной величины; p_i – вероятность появления значения x_i случайной величины.

Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. *Обозначение:* $D(X)$ дисперсия случайной величины X.

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 \text{ или } D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X).$$

Средним квадратическим отклонением (СКО, стандартным отклонением) случайной величины называют корень квадратный из ее дисперсии.

Модой дискретной случайной величины называют наиболее вероятное ее значение.

Дискретная случайная величина X, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностью

$p_n(m) = p_n(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где $p + q = 1,\ 0 < p < 1,\quad 0 < p < 1,$ $m = 0, 1, 2, ..., n,$ называется *распределенной по биномиальному закону*, а n, p – параметры биномиального распределения.

Закон распределения

x_i	0	1	2	…	k	…	n
p_i	q^n	npq^{n-1}	np^2q^{n-2}	…	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	…	p^n

Числовые характеристики:

1) математическое ожидание: $M(X) = np$;

2) дисперсия: $D(X) = npq$;

3) среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{npq}$.

Дискретная случайная величина X, которая может принимать только целые неотрицательные значения с вероятностями

$p_n(m) = p_n(X = m) = \dfrac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$, где $a = np$, называется распределенной по *закону Пуассона с параметром а.*

Закон распределения

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	e^{-a}	$\dfrac{ae^{-a}}{1!}$	$\dfrac{a^2e^{-a}}{2!}$	…	$\dfrac{a^ke^{-a}}{k!}$	…

Числовые характеристики:

1) $M(X) = a = np$;

2) $D(X) = a = np$;

3) $\sigma(X) = \sqrt{np}$.

Задачи

Уровень I

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–3	–1	2	4
P	0,1	0,2	p_3	0,3

Найти p_3, построить многоугольник распределения.

Найти:

а) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;

б) функцию распределения $F(X)$, построить ее график.

2. Математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X, заданной законом распределения, равно 6.

X	–4	x_2	10
P	0,2	p_2	0,5

Найти:

а) дисперсию $D(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$;

б) построить многоугольник распределения;

в) записать функцию распределения $F(X)$ и построить ее график.

В задачах 3 – 11 составить закон распределения ДСВ X, найти числовые характеристики этой случайной величины. Построить график функции распределения вероятностей.

3. В билете две задачи. Вероятность правильного решения первой – 0,7, второй – 0,8. ДСВ X – число правильно решенных задач билета.

4. Тест состоит из трех вопросов. На каждый приведено четыре ответа, один из которых правильный. ДСВ X – число правильных ответов при простом угадывании.

5. Партия содержит 20 телевизоров, среди которых четыре с дефектом. Купили два телевизора. ДСВ X – число исправных телевизоров среди купленных.

6. У охотника три патрона. Он стреляет по зайцу, пока не попадет или пока не закончатся патроны. ДСВ X – число сделанных охотником выстрелов, если вероятность попасть по зайцу при однократном выстреле равна 0,7.

7. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,002. ДСВ X – число поврежденных изделий. Найти вероятности следующих событий: А – повреждено менее трех изделий; В – повреждено более двух изделий; С – повреждено хотя бы одно изделие.

8. Рабочий обслуживает четыре независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго – 0,75, для третьего – 0,8, для четвертого – 0,9. ДСВ X – число станков, которые не потребуют внимания рабочего.

9. На пути движения автомобиля шесть светофоров, каждый из них или разрешает, или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. ДСВ X – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

10. Выпущено 100 лотерейных билетов, причем 10 билетов принесут их владельцам выигрыш по 10 руб., пять билетов – по 50 руб., один билет – 100 руб., остальные билеты без выигрыша. ДСВ X – выигрыш для владельца одного билета.

11. Две равносильные команды играют три партии в волейбол. ДСВ X – число выигрышей второй команды в серии.

12. Независимые случайные величины X, Y, Z имеют математическое ожидание, равное 10, и дисперсии соответственно 1, 4, 9. Найти $(-2M(Z^2))$, $D(2X-3Y+Z)$.

Уровень II

1. В ящике № 1 имеется три белых и девять черных шаров. В ящике № 2 – восемь белых и четыре черных шара. Из каждого ящика вынули по одному шару. Найти закон распределения белых шаров среди этих двух и дисперсию этой величины, построить многоугольник распределения и график интегральной функции распределения.

2. В круг с радиусом $R=9$ см вписан равносторонний треугольник. Четыре раза наугад ставим точку внутри круга. Построить закон распределения X – случайного числа попаданий точки в треугольник, вычислить $M(X)$, $D(X)$, написать выражение функции распределения $F(X)$, вычислить вероятность событий $X\in[-2;1;3]$ и $X\in[3;8]$.

3.2. Непрерывные случайные величины (НСВ). Основные распределения НСВ

Справочный материал

Непрерывной называют случайную величину, все возможные значения которой принадлежат некоторому числовому промежутку, конечному или бесконечному.

Функция распределения вероятностей случайной величины X – функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше, чем x, т. е.

$$F(x)=P(X<x).$$

Плотность распределения вероятностей $f(x)$ (плотность вероятности, дифференциальная функция распределения) НСВ – функция, равная первой производной интегральной функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Основные свойства функций $F(x)$ *и* $f(x)$

1. Если все значения НСВ принадлежат $(a; b)$, то $F(X \le a) = 0$, $F(X \ge b) = 1$.

2. Вероятность того, что НСВ X примет значение, принадлежащее интервалу $(a; b)$,

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

3. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

В частности, если все возможные значения НСВ принадлежат интервалу $(a;b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = 1.$

Числовые характеристики НСВ

Математическое ожидание $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ при условии того, что несобственный интеграл сходится абсолютно, если НСВ X распределена на всей числовой оси ($M(X) = \int\limits_a^b x \cdot f(x)dx,$ если НСВ распределена на $[a;b]$).

Дисперсия $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx$ при условии того, что интеграл сходится, если НСВ X распределена на всей числовой оси,

($D(X)=\int\limits_a^b \left(x-M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx,$ если НСВ распределена на $[a;b]$).

Также $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Непрерывная случайная величина *X* распределена по *нормальному закону*, если функция плотности распределения вероятностей *f(x)* имеет вид: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a (математическое ожидание) и σ (СКО) – постоянные величины, называемые параметрами нормального распределения.

Обозначение: $N\sim(a,\sigma)$.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $(\alpha;\,\beta)$: $P(\alpha<x<\beta)=\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$,

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt \quad \left(t=\frac{x-a}{\sigma}\right)$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что отклонение абсолютного значения нормально распределенной случайной величины меньше положительного наперед заданного числа, $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Правило «трех сигм»: если случайная величина *X* имеет нормальное распределение, то отклонение этой величины от математического ожидания по абсолютной величине не превосходит утроенного среднего квадратичного отклонения: $|X-a|\le 3\sigma$.

Задачи

Уровень I

1. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид: $F(x)=\begin{cases} 0; \ x\le -a; \\ A+B\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a}; \ \ -a<x<a; \\ 1; \ x\ge a. \end{cases}$

Определить плотность распределения $f(x)$.

2. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения

$$F(x)=\begin{cases}0; \ x<-\dfrac{\pi}{2};\\ A\cos x; \ \ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0; \ \ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти коэффициент A; построить график плотности распределения $f(x)$; найти вероятность попадания величины X на интервал $\left(-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$, найти функцию распределения $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$.

3. Случайная величина x задана функцией распределения $F(x)=\dfrac{1}{16}\cdot\left(x^2-4x+4\right)$ на отрезке $[2;\ 6]$. Найти вероятность того, что случайная величина x примет значения: а) меньше четырех; б) не меньше трех. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

4. Найти числовые характеристики НСВ, если:

а) $$f(x)=\begin{cases}0; \quad x<-1;\\ 3x^2; -1\le x\le 0;\\ 0; \quad x>0.\end{cases}$$

б) НСВ распределена на отрезке [0; 2] и задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{3}{26}(x-3)^2$;

в) $$F(x)=\begin{cases}0; \quad x\le 0;\\ \cos x; 0<x\le\dfrac{\pi}{2};\\ 1; \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

г) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sin^2 x; & x\in[-1;\ 2];\\ 0; & x\in[-1;\ 2].\end{cases}$

5. НСВ задана плотностью распределения вероятностей НСВ *X*:

а) $f(x)=\begin{cases}A(1-x^2)^{\frac{1}{2}}; & |x|<1;\\ 0; & |x|\geq 1.\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0; & x<0;\\ 0{,}1; & 0\leq x<A;\\ 0{,}2; & A\leq x<2A;\\ 0; & x\geq 2A.\end{cases}$

Найти *A, M(X), D(X).*

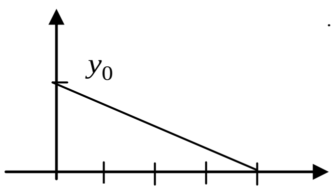

Рис. 3.1

6. НСВ X распределена «по закону треугольника» на интервале $[0;\ 4]$, ее плотность распределения изображена на рис. 3.1. Найти y_0, аналитические выражения для $F(x)$, $f(x)$, построить график $F(x)$.

7. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами: математическое ожидание 16 км, среднее квадратичное отклонение – 100 м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами не менее 15,7 км, но не более 16,3 км.

8. Пусть $X\sim N(5;\ 0{,}5)$. Найти вероятность того, что при трех независимых испытаниях СВ *X* хотя бы в одном из них примет значение в интервале $[2;\ 4]$.

9. Случайная погрешность измерения подчинена нормальному закону с параметрами $a=0, \sigma=9$ мм. Проводятся три независимых измерения. Найти вероятность того, что погрешность только одного измерения из трех меньше 3 мм по абсолютной величине.

10. Известно, что $X\sim N(50;\ \sigma)$, $P(40<X<60)=0{,}7888$. Найти $D(X)$.

11. Известно, что $X\sim N(a;\ \sigma)$, а максимальное значение плотности вероятности равно $\dfrac{1}{3\sqrt{7\pi}}$. Найти $D(X)$.

12. X – нормально распределенная СВ, причем $M(X)=6{,}2$ и $\sigma=4{,}4$. Найти $P(|X-M(X)|)<5{,}7$.

13. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом в 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что поезд ему придется ждать не больше полминуты?

14. Трамваи определенного маршрута идут с интервалом в 5 мин. Пассажир подходит к остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее, чем через минуту после ухода предыдущего трамвая, но не позднее, чем за две минуты до отхода следующего?

15. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания округляются до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка ε, меньшая 0,01.

16. Время ремонта телевизоров – случайная величина *X*, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизора составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и числовые характеристики этой случайной величины.

Уровень II

1. Случайная величина x задана функцией плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0; & x<0;\\ \dfrac{x^2}{9}; & 0\le x\le 3;\\ 0; & x>3.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что это случайная величина:

а) примет значение из интервала $[1;\ 2]$; б) в трех независимых испытаниях два раза окажется в интервале $[1;\ 2]$. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

2. Задана плотность распределения вероятностей некоторой НСВ *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0; & x<-4;\\ -Ax; & -4\le x<0;\\ A\sqrt{x}; & 0\le x<4;\\ 0; & x\ge 4.\end{cases}$$

Найти $A, F(x), P(-1<X<5)$.

3. При каком значении параметра A функция $f(x)=\begin{cases}0; & |x|\ge 1;\\ A(1-|x|); & |x|\le 1\end{cases}$ является плотностью распределения некоторой НСВ? Найти $P\left(|X|\le 0{,}5\right)$.

4. Случайная величина распределена по закону X ~ N(a; σ). Найти $P(x_1<X<x_2),$ где x_1, x_2 – абсциссы точек перегиба соответствующей кривой Гаусса.

17. Известно, что $X \sim N(1;\ \sigma)$, $P(X<2)=0{,}99$. Найти: 1) σ; 2) $M(X^2)$.

Задания для самопроверки
(тест)

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	–1	0	1	3
P	0,2	0,3	0,1	0,4

Тогда значение интегральной функции распределения вероятностей $F(2)$ равно ...

1) 0,5; 2) 1; 3) 0,6; 4) 0,4; 5) 0,25.

2. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}1, & 0<x\le 1;\\ 0{,}4, & 1<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Тогда вероятность $P(1\le X\le 3)$ равна …

1) 0,5; 2) 0,3; 3) 0,4; 4) 0,6; 5) 0,2.

3. Задан закон распределения дискретной случайной величины

X	4	7	0	3	6
P	0,1	p	0,35	0,35	0,1

Тогда значение p равно…

1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{20}$.

4. Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0; \\ \sin x; & 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 1; & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(0;\ \frac{\pi}{6}\right)$ равна…

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1.

5. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения вероятностей

$$F = \begin{cases} 0; & x \le -2; \\ Cx + 4; & -2 < x \le -1,5; \\ 1; & x > -1,5, \end{cases}$$

Тогда значение С равно …

1) 4; 2) 2; 3) -1; 4) $-1,75$; 5) $1,75$.

6. Случайная величина X подчинена нормальному закону с $a = 1$, $\sigma = 3$, $p(\alpha < X < \beta) = 0,9973$. Тогда $[\alpha, \beta]$ имеет вид…

1) $[-8; 10]$; 2) $[-2; 4]$; 3) $[-5; 7]$; 4) $[-3; 3]$; 5) $[-1; 1]$.

7. Если математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по нормальному закону, соответственно равны: $a=1,\ \sigma^2=4,$ то функция плотности распределения вероятностей имеет вид…

$$1)\ f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-1)^2}{8}};\quad 2)\ f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-1)^2}{8}};\quad 3)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-4)^2}{8}};$$

$$4)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}};\quad 5)\ f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-1)^2}{2}}.$$

8. График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $[-3;\,2]$, имеет вид, представленный на рис. 3.2.

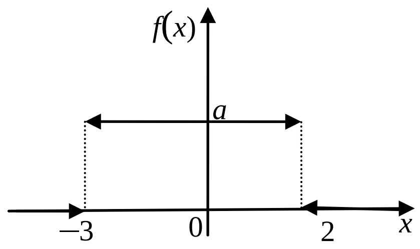

Рис. 3.2

Тогда значение a равно …

1) 0,2; 2) 0,25; 3) 0,4; 4) 1); 5) 2.

Библиографический список

1. Гусак, А. А. Высшая математика / А. А. Гусак : учебник : в 2 т. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – Т. 2. – 448 с. – Текст : непосредственный.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2005. – 256 с. – Текст : непосредственный.

3. Сборник задач по высшей математике для экономистов : учебное пособие / под ред. В. И. Ермакова. – Москва : Инфра-М, 2002. – 575 с. – Текст : непосредственный.

4. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 2-й курс / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко; под ред. С. Н. Федина. – Москва : Айрис-пресс, 2004. – 592 с. – Текст : непосредственный.

Таблица значений функции $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

X	Сотые доли *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767

X	Десятые доли *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4773	821	861	893	918	938	953	965	974	4981
3	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	999	999	000[1]

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

X	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3721	3605	3588	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1181	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
X	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0540	0440	0355	0283	0224	0175	0136	0104	0079	0060
3	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0030	0020
4	0001									

Учебное издание

АВИЛОВА Лиана Валериевна,
ДОЛГОВА Лариса Вячеславовна,
ПРИХОДЬКО Маргарита Анатольевна

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ:
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор Н. А. Майорова

***

Подписано в печать 27. 05. 2021. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,4. Уч.-изд. л. 2,7.
Тираж 50 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35