Н. А. РУБАНОВА, О. В. ГАТЕЛЮК

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ОМСК   2021

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Н. А. Рубанова, О. В. Гателюк

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
для подготовки обучающихся
к математическим олимпиадам

Омск 2021

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
Р82

Математические олимпиады: линейная алгебра: Учебно-методическое пособие для подготовки обучающихся к математическим олимпиадам / Н. А. Рубанова, О. В. Гателюк; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2021. 26 с.

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические сведения по разделу «Линейная алгебра», необходимые для подготовки к студенческим математическим олимпиадам различного уровня, а также примеры разбора олимпиадных задач указанной тематики, которые были включены в задания студенческих олимпиад ОмГУПСа прошлых лет. Демонстрируются различные приемы, которые могут быть успешно использованы при решении усложненных задач на матрицы, определители и системы линейных уравнений.

Предназначено для студентов первого и второго курсов всех специальностей и направлений подготовки.

Библиогр.: 4 назв.

Рецензенты: канд. пед. наук, доцент Н. В. Манюкова;
канд. физ.-мат. наук, доцент Ю. М. Сосновский.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В Омском государственном университете путей сообщения среди обучающихся ежегодно проводятся различные олимпиады по предметам, изучаемым в вузе. Их целями являются: развитие у обучающихся способностей к наукам; пробуждение интереса к научной деятельности; пропаганда научных знаний; выявление наиболее одаренных студентов и создание условий их интеллектуального развития, в том числе содействие им в профессиональной ориентации и продолжении образования и т. д. Предметные олимпиады ОмГУПСа выявляют студентов, которые далее принимают участие в олимпиадах более высокого уровня. Обязательной среди таких олимпиад является и олимпиада по математике, которая содействует повышению интереса участников к изучению математики, выявлению особо глубоких и прочных знаний, умений, навыков, способности к неалгоритмизированному мышлению, нестандартности подходов, реактивности мышления.

В нашем вузе математика изучается, как правило, на первом и втором курсах, поэтому и математическая олимпиада разделяется на олимпиаду среди первокурсников и олимпиаду среди студентов второго и старших курсов. Задания, которые готовят преподаватели кафедры «Высшая математика», охватывают все изучаемые в курсе разделы. Одним из обязательных элементов курса высшей математики в технических вузах является «Линейная алгебра». Традиционно в этом разделе, изучаемом, как правило, в самом начале курса, рассматриваются такие темы, как «Матрицы», «Определители» и «Системы линейных алгебраических уравнений». Задачи по линейной алгебре включаются в основном в олимпиаду для первокурсников. Кроме того, средствами линейной алгебры могут быть решены и задачи, относящиеся к другим математическим разделам, которые входят в задания для студентов второго и старших курсов.

В данном пособии приводятся основные теоретические сведения по линейной алгебре, необходимые для того, чтобы освежить в памяти изученный ранее материал для успешного решения олимпиадных задач. Рассматриваются многочисленные примеры задач прошлых лет с их решениями, в которых демонстрируются разнообразные, в том числе нестандартные, подходы, знание которых может помочь успешному преодолению трудностей выполнения заданий на олимпиаде.

1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Определение 1. Таблица вида $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = A_{m\times n}$ называется ***матрицей*** размера $m\times n$, где m – число строк, n – число столбцов, величины a_{ij} называются ***элементами матрицы A*** $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$.

В дальнейшем строки и столбцы будем называть **рядами**.

Определение 2. При $m = n$ матрица называется ***квадратной*** порядка n. При этом ее ***главной диагональю*** называется диагональ, проведенная из левого верхнего угла в правый нижний угол. Обозначение квадратной матрицы: A_n .

Определение 3. Пусть $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. Тогда $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$, $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$.

Определение 4. ***Нулевой матрицей*** называется матрица $\mathrm{O}_{m\times n}$, все элементы которой равны нулю.

Определение 5. ***Единичной матрицей*** называется квадратная матрица $E=\left(e_{ij}\right)$, где $e_{ij}=1, i=j,\ e_{ij}=0, i\neq j$. Например: $E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение 6. ***Треугольной матрицей*** называется квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

Определение 7. ***Суммой матриц*** A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}=A+B$, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij,}$, $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Определение 8. ***Произведением матрицы A на число k*** называется матрица $D=\left(d_{ij}\right)_{m\times n}=k\cdot A$: $d_{ij}=ka_{ij}$, $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$.

Определение 9. Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называются ***линейными операциями***.

Свойства линейных операций аналогичны свойствам операций над числами:

1) $A+B=B+A$; 2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$; 4) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

5) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

Определение 10. Операция над матрицей A, при которой ее строки становятся столбцами с теми же номерами, называется ***транспонированием***.

Обозначение: A^T .

Определение 11. Пусть $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$. ***Произведением матриц A и B*** называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times p}$, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n,}a_{ik}b_{kj}$, $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,p}.$

Замечание 1. Умножать матрицу A на матрицу B можно тогда и только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Замечание 2. В общем случае $AB\neq BA$. Если же $AB=BA$, то матрицы называются ***перестановочными***.

Свойства умножения матриц:

1) $AE_n=E_mA=A$, где $A=(a_{ij})_{m\times n}$; 2) $(AB)C=A(BC)$;

3) $(A+B)C=AC+BC$; 4) $A(kB)=k(AB)$;

5) $A(B+C)=AB+AC$; 6) $(AB)^T=B^TA^T$.

(Предполагаем, что матрицы A, B, C имеют размеры, позволяющие производить указанные действия.)

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определение 1. ***Определителем квадратной матрицы*** $A_1=(a_{11})$ ***первого порядка*** называется число $\det(A_1)=|A|=a_{11}$.

Определение 2. ***Определителем квадратной матрицы*** A_2 называется

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Пусть определен определитель (*n-1*)-го порядка.

Определение 3. ***Минором*** M_{ij} ***элемента*** a_{ij} квадратной матрицы A_n называется определитель матрицы, полученной из данной вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

Пример 1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4.$

Определение 4. ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} ***элемента*** a_{ij} квадратной матрицы A_n называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 2. Для матрицы из примера 1 $A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4.$

Определение 5. ***Определителем квадратной матрицы порядка n*** называется число, равное сумме произведений всех элементов какого-либо ряда матрицы и их алгебраических дополнений. Такое вычисление определителя называется ***разложением определителя по соответствующему ряду***.

Так, раскладывая определитель по строке с номером *i*, получим:

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \qquad (2.1)$$

А разложение определителя по *j*-му столбцу будет иметь вид:

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \qquad (2.2)$$

Заметим, что величина определителя не меняется от способа его вычисления.

Свойства определителей. Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

1) $|A| = |A^T|$.

2) При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

3) Если матрица A имеет два пропорциональных параллельных ряда, то ее определитель равен нулю.

4) Общий множитель элементов ряда можно выносить за знак определителя.

5) Определитель, имеющий нулевой ряд, равен нулю.

6) Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ему ряда, умноженные на число k.

7) Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого параллельного ему ряда равна нулю.

8) Пусть Δ_n^1 и Δ_n^2 – определители, различающиеся элементами только одного ряда. Тогда их сумма равна определителю, у которого указанный ряд состоит из сумм соответствующих элементов определителей Δ_n^1 и Δ_n^2.

9) $|AB| = |A| \cdot |B|$.

10) Определитель треугольной матрицы равен произведению всех элементов ее главной диагонали.

Замечание. Из свойств определителей следует, что определитель удобно вычислять, преобразовав предварительно его так, чтобы в каком-либо ряду получились нули (если все нули, то определитель равен нулю), либо привести его к треугольному виду.

Определение 6. Квадратная матрица называется ***вырожденной***, если ее определитель равен нулю, в противном случае она называется ***невырожденной***.

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

Определение 1. О*братной* к матрице A называется такая матрица A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема (об обратной матрице)

Если матрица $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ невырожденная, то она имеет обратную, которую можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

где $|A| \neq 0,$ A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} исходной матрицы A $\left(i, j = \overline{1,n}\right).$

Замечание. Если $|A| = 0,$ то A^{-1} не существует.

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Определение 1. ***Системой m линейных уравнений с n неизвестными*** называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (4.1)$$

где a_{ij} – коэффициенты при неизвестных x_j, b_i – свободные коэффициенты (свободные члены), $a_{ij}, b_i \in R,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$

Определение 2. Система (4.1) называется ***однородной*** при $b_i = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Определение 3. Упорядоченный набор чисел $\left(x_1, \dots, x_n\right)$ называется ***решением*** системы (4.1), если при подстановке этих чисел вместо неизвестных в систему каждое уравнение обращается в верное равенство.

Определение 4. ***Решить систему*** (4.1) означает либо найти все ее решения, либо установить, что их нет.

Определение 5. Система (4.1) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение (в противном случае она называется ***несовместной***).

Определение 6. Система (4.1) называется ***определенной***, если имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если имеет бесконечное множество решений.

Определение 7. Две системы называются ***эквивалентными***, или ***равносильными***, если множества их решений совпадают.

Определение 8. ***Элементарными преобразованиями системы*** (4.1) называются следующие:

1) прибавление к одному уравнению любого другого уравнения, умноженного на какое-либо число;

2) умножение какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;

3) перестановка уравнений системы.

Теорема (об элементарных преобразованиях системы)

Элементарные преобразования системы линейных уравнений приводят ее к эквивалентной.

Система (4.1) может быть записана в ***матричном виде***: $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – ***матрица системы*;**

вектор $b = \left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right)^T$ – ***столбец свободных членов*;**

вектор $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$ – ***столбец неизвестных***.

Определение 9. ***Расширенной матрицей системы*** (4.1) называется матрица

$$\overline{A} = \left(A|b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{4.2}$$

К основным методам решения систем линейных алгебраических уравнений относятся метод обратной матрицы, метод Крамера и метод Гаусса.

Метод обратной матрицы. Пусть в системе (4.1) $m = n$. Тогда матрица системы A является квадратной и можно вычислить ее определитель. Если $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную A^{-1} и система $Ax = b$ может быть решена следующим способом:

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Метод Крамера. Для системы (4.1) при условии $m = n$ и $|A| \neq 0$ введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ – определитель системы, } \Delta \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема (формулы Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система $Ax = b$ имеет единственное решение, вычисляемое при любом векторе b по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (4.3)$$

Формулы (4.3) называются ***формулами Крамера***.

Замечания:

1) если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение;

2) если $\Delta = 0$ и хотя бы один из $\Delta_i \neq 0$, то система не имеет решения;

3) если $\Delta = 0$ и все $\Delta_i = 0$, то система либо имеет бесконечное множество решений, которое можно найти с помощью метода Гаусса, либо несовместна.

Метод Гаусса. Идея метода Гаусса состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(A|b)$ системы уравнений (4.1) и перестановки столбцов матрицы A привести матрицу $(A|b)$ к виду:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & & b'_2 \\ \dots & & & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & b'_{r+1} \\ \dots & & & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & b'_m \end{array}\right). \qquad (4.4)$$

Если среди чисел $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ есть хотя бы одно, отличное от нуля, то система (4.1) несовместна.

Если $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0,$ то система (4.1) совместна. Матрица (4.4) задает систему, эквивалентную (4.1):

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad + a'_{1,\, r+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{1n} x_n = b'_1; \\ \quad x_2 \qquad\qquad + a'_{2,\, r+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2; \\ \qquad\quad \ddots \\ \qquad\qquad x_r \quad + a'_{r,\, r+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{rn} x_n = b'_r. \end{cases} \tag{4.5}$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются ***базисными***, остальные – ***небазисными***, или ***свободными***.

Если $r = n,$ то система имеет единственное решение, которое сразу определяется из системы (4.5). Если $r < n,$ то из системы (4.5) нужно выразить базисные переменные через свободные, перенеся их в правые части (в этом случае система имеет бесконечно много решений, так как свободным переменным можно придавать произвольные значения).

Замечание. Однородная система всегда совместна, так как решение $x = 0$ у нее есть всегда. Такое решение называется ***тривиальным***.

5. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1.

1) Докажите тождество:

$$(a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) = (a_1 a_2 + b_1 c_2)(b_2 c_1 + d_1 d_2) - (a_1 b_2 + b_1 d_2)(a_2 c_1 + c_2 d_1).$$

2) Какому соотношению алгебры матриц соответствует приведенное тождество?

Решение.

1) Тождество проверяется непосредственно раскрытием скобок в левой и правой частях равенства.

2) Рассмотрим матрицы $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$. Если к ним применить известное свойство определителей $|AB|=|A|\cdot|B|$, то получится указанное тождество.

Задача 2.

Найдите x, при котором $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ x & -8 & -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0.$

Решение.

Преобразуем определитель. Если из первого столбца вычесть остальные четыре, то получим:

$\Delta(x)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ x+15 & -8 & -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$. Далее раскроем этот определитель по первому столбцу, получим: $\Delta(x)=(x+15)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Полученный определитель четвертого порядка имеет треугольный вид, а значит, равен произведению элементов главной диагонали, т. е. единице. Поэтому $\Delta(x)=x+15=0,$ откуда получаем, что $x=-15.$

Задача 3.

Найдите все матрицы A размером 2×2, имеющие вид $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, удовлетворяющие условию $A^2=E,$ где E – единичная матрица.

Решение.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$. Приравниваем полученную матрицу к единичной, получаем: $\begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеем систему $\begin{cases} a^2 = 1, \\ ab+bc = 0, \\ c^2 = 1. \end{cases}$ Отсюда либо $b = 0$ и тогда $a = \pm 1, c = \pm 1,$ либо $a = -c$ и тогда b – любое число и $a = \pm 1, c = \pm 1.$ Получаем матрицы следующего вида: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ где $b \in \mathbb{R}.$

Задача 4.

Пусть квадратная матрица A удовлетворяет условию $A^2 = O,$ где О – нулевая матрица, а E – единичная. Доказать, что $A + E$ и $E - A$ являются невырожденными (неособенными) и взаимно обратными матрицами.

Решение.

Заметим, что $(A+E)\cdot(E-A) = A\cdot E + E\cdot E - A\cdot A - E\cdot A = E - A^2 = E.$ Отсюда следует, что матрицы $A+E$ и $E-A$ являются обратными друг другу и что $\det((A+E)\cdot(E-A)) = \det E = 1.$ Из свойств определителей следует, что $\det((A+E)\cdot(E-A)) = \det(A+E)\cdot\det(E-A) = 1,$ откуда можно сделать вывод, что $\det(A+E) \neq 0, \det(E-A) \neq 0,$ поэтому данные в условии матрицы являются невырожденными.

Задача 5.

Пусть $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Доказать, что $R_{-\theta} = R_\theta^{-1}.$

Решение.

$$R_{-\theta}\cdot R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $R_{-\theta}\cdot R_\theta = E,$ то перемножаемые матрицы являются обратными, т. е. $R_{-\theta} = R_\theta^{-1}.$

Задача 6.

Доказать, что при действительных a, b, c, d корни уравнения $\begin{vmatrix} a-x & c+d\cdot i \\ c-d\cdot i & b-x \end{vmatrix}=0,$ где i – мнимая единица, действительны.

Решение.

При решении этой задачи нужно знать, что $i^2=-1.$ Раскрывая определитель, получим: $ab-\left(a+b\right)x+x^2-(c^2+d^2)=0.$ Это уравнение является квадратным. Его дискриминант: $D=\left(a+b\right)^2-4(ab-c^2-d^2)=(a-b)^2+c^2+d^2\geq 0,$ а значит, корни действительные, что и требовалось доказать.

Задача 7.

Доказать, что $(\alpha\cdot B)^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}\cdot B^{-1},$ где $\alpha\neq 0,\ \alpha\in R,$

B – квадратная невырожденная матрица.

Решение.

$$(\alpha\cdot B)^{-1}\left(\alpha\cdot B\right)=\frac{1}{\alpha}\cdot B^{-1}\cdot\alpha\cdot B=E\Rightarrow(\alpha\cdot B)^{-1}=\frac{1}{\alpha}\cdot B^{-1}.$$

Задача 8.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Известно, что $BAB=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$. Найти матрицу BA.

Решение.

Вычислим $BABA=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c^2+ad & bd+cd \\ ab+ac & b^2+ad \end{pmatrix}$. Предположим, что $BA=X=\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$. Тогда легко проверить справедливость равенства $(BA)^2=X^2=\begin{pmatrix} c^2+ad & cd+bd \\ ac+ab & b^2+ad \end{pmatrix}=BABA.$ Значит, предположение было верным и $BA=\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.

Задача 9.

Вычислить определитель порядка n, элементы главной диагонали которого равны p, а остальные элементы равны q.

Решение.

Составим этот определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} p & q & q & ... & q \\ q & p & q & ... & q \\ q & q & p & ... & q \\ . & . & . & ... & . \\ q & q & q & ... & p \end{vmatrix}.$

К первой строке прибавим все остальные строки, получим: $\Delta = \begin{vmatrix} p+(n-1)q & p+(n-1)q & p+(n-1)q & ... & p+(n-1)q \\ q & p & q & ... & q \\ q & q & p & ... & q \\ . & . & . & ... & . \\ q & q & q & ... & p \end{vmatrix}.$ Вынесем общий множитель первой строки $p+(n-1)q$ за знак определителя:

$\Delta = \left(p+(n-1)q\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ q & p & q & ... & q \\ q & q & p & ... & q \\ . & . & . & ... & . \\ q & q & q & ... & p \end{vmatrix}.$ Вычтем первый столбец из всех остальных:

$\Delta = \left(p+(n-1)q\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ q & p-q & 0 & ... & 0 \\ q & 0 & p-q & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ q & 0 & 0 & ... & p-q \end{vmatrix}.$ Разложим этот определитель по

первой строке: $\Delta = \left(p+(n-1)q\right)\begin{vmatrix} p-q & 0 & ... & 0 \\ 0 & p-q & ... & 0 \\ . & . & ... & .0 \\ 0 & 0 & ... & p-q \end{vmatrix}.$ Полученный определитель, являющийся минором элемента первой строки и первого столбца, имеет порядок $n-1$ и равен произведению элементов главной диагонали (как определитель треугольной матрицы). Отсюда получаем: $\left(p+(n-1)\cdot q\right)\cdot(p-q)^{n-1}$.

Задача 10.

Доказать, что произвольную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(c \neq 0)$ с единичным определителем $ad - bc = 1$ можно однозначно представить в виде произведения матриц вида: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем произведение данных матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & x/k \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/k & k - xy/k \\ -1/k & -y/k \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Так как матрицы равны друг другу, то должны выполняться равенства: $c = -\frac{1}{k}$; $a = -\frac{x}{k}$; $d = -\frac{y}{k}$; $b = k - \frac{xy}{k}$. Покажем, что числа x, y, k можно однозначно выразить через коэффициенты исходной матрицы. Так как $c \neq 0$, то $k = -\frac{1}{c}$, откуда $x = -ka = \frac{a}{c}$; $y = -kd = \frac{d}{c}$. Покажем, что при данных значениях k, x, y выполняется равенство $k - \frac{xy}{k} = b$. В самом деле: $k - \frac{xy}{k} == -\frac{1}{c} - \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{c}(-c) = \frac{ad - 1}{c} = \frac{ad - ad + bc}{c} = b$, так как по условию $ad - bc = 1$. Отсюда следует утверждение задачи.

Задача 11.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + \ldots + 2x_n = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + \ldots + 4x_n = 2; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 + \ldots + 6x_n = 3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 + \ldots + (2n-1)x_n = n. \end{cases}$

Решение.

Воспользуемся методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & \ldots & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 6 & 3 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-1 & n \end{array}\right)$. Вычтем из каждой последующей строки предыдущую, получим: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 2 & 1 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right)$. Все переменные системы являются базисными, значит, она имеет одно решение. Запишем систему, эквивалентную полученной матрице: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + \ldots + 2x_n = 1; \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + \ldots + 2x_n = 1; \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 + 2x_5 + \ldots + 2x_n = 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = 1. \end{cases}$

Решая эту систему, начиная с последнего уравнения, получаем, что $x_n = 1$, а все остальные переменные связаны соотношением $x_{k-1} = -x_k$, $k = n, n-1, \ldots, 2$.

Задача 12.

Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 \end{vmatrix}$.

Решение.

Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}.$$ Мы получили рекуррентную формулу, по которой определитель порядка n сводится к определителям порядка $n-1$ и $n-2$.

Вычислим $\Delta_1 = 3, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$ Согласно рекуррентной формуле получим: $\Delta_3 = 3\cdot 7 - 2\cdot 3 = 15, \Delta_4 = 3\cdot 15 - 2\cdot 7 = 31.$ Можно заметить, что $\Delta_2 - \Delta_1 = 4,$ $\Delta_3 - \Delta_2 = 8, \Delta_4 - \Delta_3 = 16.$ Таким образом, получаем, что $\Delta_2 = 3 + 2^2,$ $\Delta_3 = 3 + 2^2 + 2^3, \Delta_4 = 3 + 2^2 + 2^3 + 2^4.$ Можно выдвинуть предположение, что $\Delta_n = 3 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 4\cdot 2^{n-1} - 1.$ Последнее выражение для определителя получено с применением формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии. Для доказательства гипотезы о том, что $\Delta_n = 4\cdot 2^{n-1} - 1,$ воспользуемся методом математической индукции. Считая гипотезу справедливой для номеров $k \le n-1,$ докажем ее для номера $k = n.$ Итак, $\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2} = 3\left(4\cdot 2^{n-2} - 1\right) - 2\left(4\cdot 2^{n-3} - 1\right) = 4\cdot 2^{n-1} - 1.$ Теперь формула $\Delta_n = 4\cdot 2^{n-1} - 1$ строго доказана. Воспользуемся ей для вычисления предела:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left(4\cdot 2^{n-1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 2^{n-1} - 1}{2^n} = 2.$$

Задача 13.

Вычислить определитель: $$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Вычтем первый столбец из всех остальных:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha^2 & 2\alpha+1 & 4\alpha+4 & 6\alpha+9\\ \beta^2 & 2\beta+1 & 4\beta+4 & 6\beta+9\\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 4\gamma+4 & 6\gamma+9\\ \delta^2 & 2\delta+1 & 4\delta+4 & 6\delta+9\end{vmatrix}.$$ Вынесем общий множитель четвертого столбца за знак определителя: $\Delta=3\begin{vmatrix}\alpha^2 & 2\alpha+1 & 4\alpha+4 & 2\alpha+3\\ \beta^2 & 2\beta+1 & 4\beta+4 & 2\beta+3\\ \gamma^2 & 2\gamma+1 & 4\gamma+4 & 2\gamma+3\\ \delta^2 & 2\delta+1 & 4\delta+4 & 2\delta+3\end{vmatrix}$. Складывая второй и четвертый столбцы и вычитая результат из третьего столбца, мы получим нулевой столбец, а значит, и определитель равен нулю.

Задача 14.

Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix}b+c & c+a & a+b\\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1\\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix}$, если $\begin{vmatrix}a & b & c\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=A.$

Решение.

Вычтем из первого столбца второй и третий: $\Delta=\begin{vmatrix}-2a & c+a & a+b\\ -2a_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1\\ -2a_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix}.$

Прибавим ко второму столбцу первый и третий:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2a & c+b & a+b \\ -2a_1 & c_1+b_1 & a_1+b_1 \\ -2a_2 & c_2+b_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель -2 из первого столбца и вычтем его из третьего: $\Delta = -2\begin{vmatrix} a & c+b & b \\ a_1 & c_1+b_1 & b_1 \\ a_2 & c_2+b_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Вычтем из второго столбца третий: $\Delta = -2\begin{vmatrix} a & c & b \\ a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Поменяем местами второй и третий столбцы, определитель при этом поменяет знак: $\Delta = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2A.$

Задача 15.

Вычислить определитель: $\Delta_8 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

Решение.

Вынесем из первых четырех строк множитель a, а из последних четырех – множитель b. Получим определитель:

$$\Delta_8 = a^4 b^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b/a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a/b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a/b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a/b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a/b \end{vmatrix}.$$ Вычтем теперь из восьмой строки первую, из седьмой – вторую, из шестой – третью, из пятой – четвертую: $$\Delta_8 = a^4 b^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b/a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a/b - b/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a/b - b/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a/b - b/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a/b - b/a \end{vmatrix}.$$

Это определитель треугольной матрицы, поэтому он равен произведению элементов главной диагонали: $\Delta_8 = a^4 b^4 \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^4 = \left(a^2 - b^2 \right)^4$.

Задача 16.

Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2015 \end{vmatrix}$.

Решение.

Определитель равен 1, так как если вычесть 1-ю строку из всех остальных, он сводится к аналогичному определителю на единицу меньшего порядка.

6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.

Найти все корни уравнения: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$

Ответ: $x=0;\ x=1;\dots;\ x=n-1.$

Задача 2.

Все элементы квадратной матрицы A порядка n – числа 0; 1 или -1, причем каждая строка и столбец содержат ровно один ненулевой элемент. Доказать, что $A^m = E$, где E – единичная матрица, а m – некоторое натуральное число.

Задача 3.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y + z = 1; \\ ax + by + cz = d; \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$

Ответ:

Если $a,\ b,\ c$ все различны, то $x = \dfrac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$; $y = \dfrac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}$; $z = \dfrac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}$.

Решения зависят от одного параметра, если: 1) $a = b,\ a \neq c,\ d = a$ или $d = c$; 2) $b = c,\ a \neq b,\ d = a$ или $d = b$; 3) $a = c,\ a \neq b,\ d = a$ или $d = b$.

Решения зависят от двух параметров, если $a = b = c = d$.

Во всех остальных случаях система решений не имеет.

Библиографический список

1. Т а р а с о в а, Н. В. Олимпиады по математике для студентов / Н. В. Т а р а с о в а, Т. Е. М а р т ы н о в а. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 496 с. – Текст : непосредственный.

2. Б е р к о в и ч, Ф. Д. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями / Ф. Д. Б е р к о в и ч, В. С. Ф е д и й, В. И. Ш л ы к о в. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2008. – 172 с. – Текст : непосредственный.

3. А л е к с а н д р о в, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. А л е к с а н д р о в. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 512 с. – Текст : непосредственный.

4. Б р о н ш т е й н, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Б р о н ш т е й н, К. А. С е м е н д я е в. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 608 с. – Текст : непосредственный.

Учебное издание

РУБАНОВА Наталия Алексеевна,
ГАТЕЛЮК Олег Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 22.04.2021. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,6. Уч.-изд. л. 1,7.
Тираж 50 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35