В. А. ФЁДОРОВ,

Е. А. ШВЕД

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ПОЛЯ

ОМСК 2021

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

В. А. Фёдоров,
Е. А. Швед

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ПОЛЯ

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
для выполнения индивидуальной самостоятельной работы

Омск 2021

УДК 514.742.4(075.8)
ББК 22.151.51я73
Ф33

Методические рекомендации к решению типовых задач по теории поля: Учебно-методическое пособие / В. А. Фёдоров; Е. А. Швед; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2021. 27 с.

Данное учебно-методическое пособие содержит 10 основных типов задач по теории скалярных и векторных полей с тридцатью вариантами данных и краткие рекомендации по их решению. Теоретические сведения, необходимые для решения задач, изложены в пособии «Элементы теории поля» [1].

Предназначено для самостоятельного решения типовых задач по теории поля студентами второго курса всех направлений подготовки очной формы обучения. Пособие может быть использовано также студентами заочной формы обучения.

Библиогр.: 6 назв. Табл. 10.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент В. В. Дмитриев;
канд. техн. наук, доцент Т. В. Ковалева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие содержит стандартные задачи по теории скалярных и векторных полей с тридцатью вариантами данных, предназначенные для самостоятельного решения студентами в качестве типовых индивидуальных заданий.

Каждую из десяти предлагаемых задач предваряют краткие методические рекомендации по её решению и оформлению. Несмотря на это рекомендуется ознакомиться с ранее изданным учебно-методическим пособием «Элементы теории поля», в котором подробно разобрано решение всех аналогичных задач. Кроме того, в упомянутом пособии кратко изложены основные идеи, определения и теоремы теории поля, иллюстрированные рисунками.

Задачи, включённые в данное пособие, ограничиваются случаем двух- или трёхмерного скалярного или векторного поля. Для эффективного и полного усвоения способов и методов решения представленных задач необходимы знания разделов, которые изучались в предыдущих семестрах: математического анализа о кратных, криволинейных и поверхностных интегралах, аналитической геометрии в трёхмерном пространстве и векторной алгебры.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ПОЛЯ

Задача 1

Поверхности равного уровня. Производная скалярного поля по направлению

Найти уравнение поверхности равного уровня скалярного поля $U = U(x; y; z)$, проходящей через точку M, и производную поля в этой точке по направлению к точке M_1. Скалярная функция и координаты точек приведены в табл. 1.1.

Методические рекомендации. Воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 1, с. 8.

В ответе уравнение поверхности равного уровня записать в виде $U(x; y; z) = \text{const}$. Производную поля по направлению можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(\beta) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(\gamma)\Bigg|_{(x_0;y_0;z_0)}, \qquad (1.1)$$

где $\cos(\alpha), \cos(\beta)$ и $\cos(\gamma)$ – проекции орта заданного направления на координатные оси. Указать, убывает или возрастает поле в заданной точке в заданном направлении.

Таблица 1.1

Варианты данных для задачи № 1

Номер варианта	Скалярное поле $U = U(x; y; z)$	Координаты точек	
		$M(x_0; y_0; z_0)$	$M_1(x_1; y_1; z_1)$
1	2	3	4
1	$U = x^3 - \frac{1}{y} + y \cdot \ln(z+9)$	(–2; 2;–8)	(7; 10; 4)
2	$U = \sqrt[3]{x} + \sin(y+z) - y^2$	(8;–2; 2)	(12;–3;–6)
3	$U = e^{2x+6} - \frac{y}{5} + x^2 z$	(–3;–10;–4)	(–3; 2; 5)
4	$U = \frac{y}{x^2} + \operatorname{arctg}(2x) + 24\sqrt[3]{z}$	(1; 10; 8)	(–1; 2;–8)
5	$U = \frac{x^2}{y} + \ln(x-y) + z^2$	(–2;–3;–2)	(10; 0; 2)
6	$U = \frac{x}{z^2} + y^4 - \sin(4-2z)$	(–6;–1; 2)	(–8; 2;–4)

Продолжение табл. 1.1

1	2	3	4
7	$U=\frac{xy^2}{32}-\sqrt[3]{y}+e^{z+1}$	(3;–8;–1)	(–9;–2;–5)
8	$U=\frac{2z}{\sqrt{x}}-17\cdot\operatorname{arcctg}(y)+z$	(4;–4; 6)	(3; 4; 10)
9	$U=2\cdot\ln(x+y)-\frac{y^2}{z}-\frac{3\cdot\sqrt[3]{z}}{4}$	(–9; 10; 8)	(–3; 9;–10)
10	$U=\sin(y-2x)+(y+z)^2$	(6; 12;–10)	(–7; 8; 6)
11	$U=e^{2x+4}+\frac{y}{x^3}+(z+y)^2$	(–2; 11;–12)	(–2;–9; 3)
12	$U=\sqrt{x+4}+\ln(x-2y)+z$	(5; 2;–12)	(–3; 8; 12)
13	$U=-\operatorname{tg}(x+y)+\frac{y}{2}+(y+2z)^2$	(7;–7;–3)	(3;–10; 9)
14	$U=\ln(x+y)+\sqrt{y}+\frac{z}{x}$	(–8; 9;–12)	(–4; 1; 7)
15	$U=e^{x+2y}+\sqrt{x-z}-\frac{z}{y}$	(10;–5;–6)	(–4; 0;–8)
16	$U=9\cdot x+\sin(5z+y)+\frac{x}{z}$	(–2; 5;–1)	(5;–1;–7)
17	$U=\sqrt{xz}+15\cdot\operatorname{arctg}(y)-\frac{z}{y}$	(–4; 3;–9)	(–11; 9;–3)
18	$U=\frac{9z}{x^2}+\operatorname{tg}(y)+\sqrt{2x+z}$	(3; 0; 10)	(–1;–8; 2)
19	$U=6\cdot\sqrt[3]{y+z}-\ln(x+13)+\frac{y}{z}$	(–12; 7; 1)	(–4;–5;–8)
20	$U=\sqrt{x+y}+e^{2y}+\frac{z}{x}$	(4; 0; 5)	(4; 8; 11)
21	$U=xz^2-\sin(y+5z)+\frac{x}{z}$	(–2;–5; 1)	(–6; 11;–12)

Окончание табл. 1.1

1	2	3	4
22	$U=10\cdot\operatorname{arctg}(x)-\frac{y}{z}+x^2$	(–3; 10;–2)	(10;–8;–8)
23	$U=\sqrt{y-x}+y^2z^3+\operatorname{tg}(z)$	(–10;–1; 0)	(0; 1; 11)
24	$U=\sqrt{x-3y}+\frac{x}{y}+\ln(z+2)$	(–9;–6;–1)	(–8;–8; 1)
25	$U=6\cdot\sqrt{xz}-e^{y+7}-\frac{y}{x}$	(–1;–7;–9)	(9;–1; 6)
26	$U=\sqrt{3y-x}+\sin(4y+3z)-z^2$	(–10;–3; 4)	(–12; 0;–2)
27	$U=\sqrt{xy}-5\cdot\operatorname{arctg}(y)-z^2$	(12; 3;–7)	(5; 9;–1)
28	$U=\sqrt[3]{2xz}-\frac{xy^2}{9}+\operatorname{tg}(x-z)$	(–2;–3;–2)	(10; 0; 2)
29	$U=\frac{x}{y^3}+\sqrt[3]{z-x}+\ln(y+z)$	(–6;–1; 2)	(–8; 2;–4)
30	$U=\sqrt{3x}+\sin(x+3z)+\frac{y}{z^3}$	(3;–8;–1)	(–9;–2;–5)

Задача 2

Векторные линии поля

Найти уравнение векторной линии поля $\vec{a}(M)$, проходящей через точку $A(x_0; y_0)$. Плоское векторное поле и координаты точки A приведены в табл. 2.1.

Методические рекомендации. Воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 2, с. 13.

Аналитически выразить векторную линию поля можно из уравнения

$$\frac{dx}{P(x;y;z)}=\frac{dy}{Q(x;y;z)}, \tag{2.1}$$

которое является условием коллинеарности вектора поля и касательной к векторной линии. В ответе получившееся уравнение линии записать в виде $y = f(x)$. В случае если получится кривая второго порядка, допускается канонический вид уравнения линии.

Таблица 2.1

Варианты данных для задачи № 2

Номер варианта	Поле $\vec{a}(M)$	Точка $A(x_0; y_0)$	Номер варианта	Поле $\vec{a}(M)$	Точка $A(x_0; y_0)$
1	$\vec{a} = y\vec{i} - 3\vec{j}$	(2;–5)	16	$\vec{a} = y\vec{i} + 3x\vec{j}$	(5;–3)
2	$\vec{a} = 2y\vec{i} + x\vec{j}$	(7;–1)	17	$\vec{a} = 2y\vec{i} - 6x\vec{j}$	(0; 4)
3	$\vec{a} = 5y\vec{i} - 2x\vec{j}$	(2; 3)	18	$\vec{a} = 4x^2y\vec{i} - \vec{j}$	(1; 5)
4	$\vec{a} = \sin(y)\vec{i} - 2x\vec{j}$	(–2; 0)	19	$\vec{a} = -\cos(y)\vec{i} + 2x\vec{j}$	(1; 0)
5	$\vec{a} = 3\cos(y)\vec{i} + 4x\vec{j}$	(3; 0)	20	$\vec{a} = y\vec{i} + 2\vec{j}$	(–1; 1)
6	$\vec{a} = 2y\vec{i} + \cos(x)\vec{j}$	(0; –1)	21	$\vec{a} = e^y\vec{i} + 2x\vec{j}$	(–2; 0)
7	$\vec{a} = \vec{i} - 2xy\vec{j}$	(0; 1)	22	$\vec{a} = 3\vec{i} - 2x\vec{j}$	(–1;–5)
8	$\vec{a} = 4y\vec{i} + 5\vec{j}$	(2; 3)	23	$\vec{a} = 3y\vec{i} + 4x\vec{j}$	(3;–1)
9	$\vec{a} = 6y\vec{i} + 2x\vec{j}$	(6;–2)	24	$\vec{a} = 6y\vec{i} - x\vec{j}$	(4; 2)
10	$\vec{a} = 4y\vec{i} - x\vec{j}$	(1;–3)	25	$\vec{a} = 3x^2\vec{i} + 2y^2\vec{j}$	(2;–1)
11	$\vec{a} = 2xy\vec{i} + 3\vec{j}$	(1;–3)	26	$\vec{a} = \cos(y)\vec{i} + 2x\vec{j}$	(2; 0)
12	$\vec{a} = 2\cos(y)\vec{i} - x\vec{j}$	(–1; 0)	27	$\vec{a} = 8y\vec{i} - \sin(x)\vec{j}$	(0; 1)
13	$\vec{a} = 2x\vec{i} - y^2\vec{j}$	(1; 2)	28	$\vec{a} = 2y\vec{i} + e^x\vec{j}$	(0; 5)
14	$\vec{a} = 2y\vec{i} + \sin(x)\vec{j}$	(0; –2)	29	$\vec{a} = 6y\vec{i} + \vec{j}$	(3;–2)
15	$\vec{a} = 2\vec{i} - 4x\vec{j}$	(–6; 1)	30	$\vec{a} = 2y\vec{i} + x\vec{j}$	(1;–4)

Задача 3

Поток векторного поля через плоскую поверхность

Найти поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через треугольник, принадлежащий плоскости (p), вершинами которого являются точки пересечения этой плоскости с координатными осями. Вид поля и уравнение плоскости заданы в табл. 3.1.

Методические рекомендации. Воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 3, с. 15.

Поток векторного поля найти с помощью поверхностного интеграла

$$\Pi = \iint_S \left(\vec{a}(M), d\vec{S}\right), \tag{3.1}$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0$. Орт нормали к поверхности $\vec{n}_0$ должен образовывать острый угол с осью Oz, для этого выбрать такой знак перед вектором нормали, чтобы третье слагаемое (проекция на ось аппликат) было положительным. При интегрировании поверхность можно проецировать на любую координатную плоскость.

Таблица 3.1

Варианты данных для задачи № 3

Номер варианта	Векторное поле $\vec{a} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$	Уравнение плоскости (p): $ax+by+cz+d = 0$
1	2	3
1	$\vec{a} = (x+y)\vec{i} - 3z\vec{j} + (2x-z)\vec{k}$	$3x - y + 2z - 6 = 0$
2	$\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (2y-z)\vec{j} + y\vec{k}$	$2x - y + z - 4 = 0$
3	$\vec{a} = 3y\vec{i} + (x+2z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$	$3x - y + z - 3 = 0$
4	$\vec{a} = (2x+z)\vec{i} + 3x\vec{j} + (y-z)\vec{k}$	$4x - 2y + z - 8 = 0$
5	$\vec{a} = (x-z)\vec{i} + (y+2z)\vec{j} + 7x\vec{k}$	$9x + 3y - z + 9 = 0$
6	$\vec{a} = 4z\vec{i} + (x-3y)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$	$2x - y - z + 2 = 0$
7	$\vec{a} = (y-z)\vec{i} + (x-2y+z)\vec{j} + z\vec{k}$	$5x - y + z - 5 = 0$
8	$\vec{a} = (2x+y)\vec{i} + 2z\vec{j} + (x-3z)\vec{k}$	$3x - 2y - z - 6 = 0$
9	$\vec{a} = (x-2z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} - y\vec{k}$	$x - 2y - z + 4 = 0$
10	$\vec{a} = 2y\vec{i} + (3x-z)\vec{j} + (2x+3y)\vec{k}$	$x + 3y - z + 3 = 0$
11	$\vec{a} = (x-2z)\vec{i} + 2x\vec{j} + (2y+z)\vec{k}$	$2x - 8y - z + 8 = 0$
12	$\vec{a} = (2x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + 3x\vec{k}$	$3x - 9y + z - 9 = 0$
13	$\vec{a} = -3z\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + (y-z)\vec{k}$	$x - 4y + z - 2 = 0$
14	$\vec{a} = (2y-z)\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} - 3z\vec{k}$	$x + 5y - z + 5 = 0$
15	$\vec{a} = (x-y)\vec{i} + 4z\vec{j} + (x-2z)\vec{k}$	$x - 3y - 2z + 6 = 0$
16	$\vec{a} = (2x+z)\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + 3y\vec{k}$	$x + y - 2z - 4 = 0$
17	$\vec{a} = 4y\vec{i} + (2x-z)\vec{j} - (x+2y)\vec{k}$	$3x - 3y + z - 3 = 0$

1	2	3
18	$\vec{a}=(3x+2z)\vec{i}-4x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$	$x+4y-z+8=0$
19	$\vec{a}=(x-2z)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}-2x\vec{k}$	$3x+3y-z+9=0$
20	$\vec{a}=2z\vec{i}+(3x-y)\vec{j}+(2y+z)\vec{k}$	$x+4y+2z-2=0$
21	$\vec{a}=(y+2z)\vec{i}+(2x+y-z)\vec{j}+2z\vec{k}$	$5x-3y+z+5=0$
22	$\vec{a}=(2x-y-z)\vec{i}+(3y+z)\vec{j}+(x+y+2z)\vec{k}$	$x+2y+z-1=0$
23	$\vec{a}=(-x+2y)\vec{i}-2z\vec{j}+(x-5z)\vec{k}$	$2x+3y-z+6=0$
24	$\vec{a}=(2x-z)\vec{i}+(3y-z)\vec{j}-2y\vec{k}$	2x + y + 2z – 4 = 0
23	$\vec{a}=(-x+2y)\vec{i}-2z\vec{j}+(x-5z)\vec{k}$	$2x+3y-z+6=0$
24	$\vec{a}=(2x-z)\vec{i}+(3y-z)\vec{j}-2y\vec{k}$	$2x+y+2z-4=0$
25	$\vec{a}=y\vec{i}+(4x+z)\vec{j}+(3x-y)\vec{k}$	$-3x+y+z-3=0$
26	$\vec{a}=(x-z)\vec{i}+3x\vec{j}+(5y+3z)\vec{k}$	$8x-2y+z-8=0$
27	$\vec{a}=(2x-z)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+2x\vec{k}$	$6x-9y-z-9=0$
28	$\vec{a}=z\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+(y-3z)\vec{k}$	$4x+y-2z+2=0$
29	$\vec{a}=(2y+z)\vec{i}+(x+2y+z)\vec{j}+3z\vec{k}$	$x-y+5z-5=0$
30	$\vec{a}=(x-2y+z)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+(2x-y+3z)\vec{k}$	$2x-y+z-1=0$

Задача 4

Поток векторного поля через всю поверхность пирамиды

Найти поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через всю поверхность треугольной пирамиды, образованной координатными плоскостями и плоскостью (p). Вид поля и уравнение плоскости заданы в табл. 4.1.

Методические рекомендации. Воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 5, с. 21.

Сделать рисунок. Для вычисления потока через всю замкнутую поверхность использовать формулу Остроградского – Гаусса для «внешней» нормали:

$$\Pi=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV. \qquad (4.1)$$

Вычисления могут значительно упроститься, если иметь в виду, что при равенстве единице подынтегральной функции сам интеграл численно равен области интегрирования:

$$\int_L dl = L; \quad \iint_S ds = S; \quad \iiint_V dv = V. \tag{4.2}$$

Необходимо помнить о том, что эти равенства только численные. Итог интегрирования имеет размерность, равную произведению размерностей подынтегральной функции и дифференциала. Обычно размерности подынтегральной функции являются плотностью какой-либо величины. В равенствах (4.2) это, соответственно, плотность погонная, поверхностная и объёмная, а результатом интегрирования является количественная характеристика самой величины, распределённой соответственно на линии, поверхности или в объёме.

Таблица 4.1

Варианты данных для задачи № 4

Номер варианта	Векторное поле $\vec{a} = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k}$	Уравнение плоскости (p): $ax+by+cz+d = 0$
1	2	3
1	$\vec{a} = (x - 5e^z)\vec{i} + (3y + 2z^3)\vec{j} + (7\cos(x) - z)\vec{k}$	$9x + 3y - z + 9 = 0$
2	$\vec{a} = (2x - 4z)\vec{i} + (\mathrm{ctg}(x) - 3y)\vec{j} + (\sqrt{y} + z)\vec{k}$	$2x - y - 4z + 2 = 0$
3	$\vec{a} = (6y - 5\sqrt{z})\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + 3z\vec{k}$	$5x - y + z - 5 = 0$
4	$\vec{a} = (2x + \mathrm{tg}(y))\vec{i} + 9z^2\vec{j} + (\sqrt{x} - 8z)\vec{k}$	$x - 2y - z - 6 = 0$
5	$\vec{a} = (7x - 2z^3)\vec{i} + (y + \cos(z))\vec{j} + (y - 2z)\vec{k}$	$x - 2y - 5z + 10 = 0$
6	$\vec{a} = 2x\vec{i} + (3\sqrt{x} - y)\vec{j} + (2x + 3z)\vec{k}$	$x + 3y - z + 6 = 0$
7	$\vec{a} = (x - 2z^2)\vec{i} + (2x + 5y)\vec{j} + (2yx + z)\vec{k}$	$2x - 4y - z + 8 = 0$
8	$\vec{a} = (2x + yz)\vec{i} + (4y + z^2)\vec{j} + 3x\vec{k}$	$3x - 9y + z - 3 = 0$
9	$\vec{a} = (9x - 3yz)\vec{i} + (2\sqrt{x} + y)\vec{j} + (5y - z)\vec{k}$	$x - 4y + z - 2 = 0$
10	$\vec{a} = (2x - yz)\vec{i} + (x^2 - y - \sqrt{z})\vec{j} - 3z\vec{k}$	$x + 5y - z + 5 = 0$
11	$\vec{a} = (x - y^3)\vec{i} + (10y - 4z)\vec{j} + (\mathrm{tg}(x) - 2z)\vec{k}$	$x - 3y - 2z + 6 = 0$
12	$\vec{a} = (2x + \cos(z))\vec{i} + (y - \sqrt{2z})\vec{j} + 3\ln(y)\vec{k}$	$x + y - 2z - 4 = 0$
13	$\vec{a} = (3x - 4y)\vec{i} + (\sqrt{2x} - 7y - z)\vec{j} + (x^2 + 10z)\vec{k}$	$3x - 3y + z - 3 = 0$
14	$\vec{a} = (3x + 2e^z)\vec{i} + (4x - y)\vec{j} + (\sin(y) - 2z)\vec{k}$	$x + 4y - 2z + 8 = 0$
15	$\vec{a} = (5x - 2\mathrm{arctg}(z))\vec{i} + (2y + \ln(z))\vec{j} + (2x - z)\vec{k}$	$3x + 3y - z + 6 = 0$
16	$\vec{a} = (6x - \sqrt{2z})\vec{i} + (\mathrm{arcctg}(3x) - y)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}$	$x - y + 2z - 2 = 0$

Окончание табл. 4.1

1	2	3
17	$\vec{a}=(x+2\cos(z))\vec{i}+(2x+y-z^3)\vec{j}+4z\vec{k}$	$5x-3y+z+15=0$
18	$\vec{a}=(2x-y^2-z)\vec{i}+(3y+\mathrm{tg}(z))\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$	$x+2y+z-1=0$
19	$\vec{a}=(x+2\sin(y))\vec{i}-2(y-\sqrt{z})\vec{j}+(\ln(x)-5z)\vec{k}$	$2x+3y-z+6=0$
20	$\vec{a}=(2x-\mathrm{arctg}(z))\vec{i}+(3y-z^2)\vec{j}-2\ln(y)\vec{k}$	$2x+y+2z-4=0$
21	$\vec{a}=\cos(y)\vec{i}+(4y+3^z)\vec{j}+(3\ln(x)-z)\vec{k}$	$-3x+y+z-3=0$
22	$\vec{a}=(x-\mathrm{tg}(z))\vec{i}+(3x-y)\vec{j}+(5\sqrt{y}+3z)\vec{k}$	$8x-2y+z-8=0$
23	$\vec{a}=(2x-\sqrt[3]{z})\vec{i}+(y-z^2)\vec{j}+(2x-3z)\vec{k}$	$6x-7y-z-2=0$
24	$\vec{a}=(2x+\ln(z))\vec{i}+(\sqrt{x}+2y)\vec{j}+(y^2-3z)\vec{k}$	$4x+y-2z+2=0$
25	$\vec{a}=(7y+\sqrt{z})\vec{i}+(2y+xz)\vec{j}+(\ln(x)+z)\vec{k}$	$x-y+5z-5=0$
26	$\vec{a}=(x-yz)\vec{i}+(4y-\sqrt{z})\vec{j}+(2xy+z)\vec{k}$	$2x-y+z-1=0$
27	$\vec{a}=(x+\arccos(y))\vec{i}-3z^2\vec{j}+(2x-z)\vec{k}$	$3x-y+2z-1=0$
28	$\vec{a}=(5x+3^z)\vec{i}+(\ln(x)+y)\vec{j}+y\vec{k}$	$2x-y+z-4=0$
29	$\vec{a}=(3y-\sin(z))\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+(\sqrt{x}-z)\vec{k}$	$3x-y+z-3=0$
30	$\vec{a}=(4x+y^2z)\vec{i}+3xz\vec{j}+(\ln(y)-z)\vec{k}$	$4x-2y+z-8=0$

Задача 5

Поток векторного поля через замкнутую поверхность в полярных координатах

Найти поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через всю поверхность тела T, определяемого системой неравенств. Вид поля и система неравенств заданы в табл. 5.1.

Методические рекомендации. Воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 6, с. 22.

Сделать рисунок. Для вычисления потока через всю замкнутую поверхность использовать формулу Остроградского – Гаусса для «внешней» нормали (4.1). Перейти к цилиндрической системе координат по формулам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi; \\ x^2+y^2=\rho^2; \\ dV=\rho d\rho d\varphi dz. \end{cases} \tag{5.1}$$

Таблица 5.1

Варианты данных для задачи № 5

Номер варианта	Векторное поле $\vec{a} = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k}$	Система неравенств, определяющая тело T
1	2	3
1	$\vec{a} = (x - 2y + z)\vec{i} + (3yx - z)\vec{j} + (2x - y - z)\vec{k}$	$\begin{cases} (z+1)^2 \ge x^2 + y^2; \\ z \le 3; \\ x \ge 0. \end{cases}$
2	$\vec{a} = (2xy - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z - yz)\vec{k}$	$\begin{cases} 6 - z \ge x^2 + y^2; \\ z \ge 2; \\ y \ge 0. \end{cases}$
3	$\vec{a} = (x + 2y^2 - z)\vec{i} + (x - y - \sqrt{z})\vec{j} + 6zx\vec{k}$	$\begin{cases} (z-5)^2 \ge x^2 + y^2; \\ z \ge 4; \\ x \ge 0. \end{cases}$
4	$\vec{a} = (3xy - \sqrt{z})\vec{i} + (x^2 - 2y + z)\vec{j} + 2z\vec{k}$	$\begin{cases} z - 3 \ge x^2 + y^2; \\ z \le 7; \\ y \le 0. \end{cases}$
5	$\vec{a} = (x^2 + 2y + z)\vec{i} + (x - 3y + z)\vec{j} + 3z\vec{k}$	$\begin{cases} (z+2)^2 \ge x^2 + y^2; \\ z \le 2; \\ x \ge 0. \end{cases}$
6	$\vec{a} = (y - 2x)\vec{i} + (2x + y^2 - z)\vec{j} + 2z\vec{k}$	$\begin{cases} 5 - z \ge x^2 + y^2; \\ z \ge 1; \\ y \ge 0. \end{cases}$
7	$\vec{a} = (x + 3z)\vec{i} + (4xy + z)\vec{j} + (\sqrt{y} - z)\vec{k}$	$\begin{cases} (z-4)^2 \ge x^2 + y^2; \\ z \ge 3; \\ x \ge 0. \end{cases}$
8	$\vec{a} = (4z - x)\vec{i} + (x - 3y^2)\vec{j} + (\sin(y) + z)\vec{k}$	$\begin{cases} z - 2 \ge x^2 + y^2; \\ z \le 6; \\ y \le 0. \end{cases}$
9	$\vec{a} = (5x + z)\vec{i} + (y + 2y^2)\vec{j} + (y - 6z)\vec{k}$	$\begin{cases} (z+3)^2 \ge x^2 + y^2; \\ z \le 1; \\ x \ge 0. \end{cases}$
10	$\vec{a} = (xy + 2z)\vec{i} + (xy + y^2)\vec{j} + (2y - xz)\vec{k}$	$\begin{cases} 7 - z \ge x^2 + y^2; \\ z \ge 3; \\ y \ge 0. \end{cases}$

1	2	3
11	$\vec{a}=(5x^2-3y+z)\vec{i}+(2yx+z)\vec{j}+3\sqrt{x}\vec{k}$	$\begin{cases}(z-3)^2\ge x^2+y^2;\\ z\ge 2;\\ x\ge 0.\end{cases}$
12	$\vec{a}=(3xy-z)\vec{i}+(y+2z^2)\vec{j}+(7\sqrt{x}-z)\vec{k}$	$\begin{cases}z-1\ge x^2+y^2;\\ z\le 5;\\ y\le 0.\end{cases}$
13	$\vec{a}=(2x^2-z)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+(2xz-z)\vec{k}$	$\begin{cases}(z+4)^2\ge x^2+y^2;\\ z\le 0;\\ x\ge 0.\end{cases}$
14	$\vec{a}=(3xy-z)\vec{i}+(y^2+z)\vec{j}-(2x+\sqrt{y})\vec{k}$	$\begin{cases}9-z\ge x^2+y^2;\\ z\ge 5;\\ y\ge 0.\end{cases}$
15	$\vec{a}=(3x-2z)\vec{i}+(2x-7xy-y)\vec{j}+(2y+z)\vec{k}$	$\begin{cases}(z-2)^2\ge x^2+y^2;\\ z\ge 1;\\ x\ge 0.\end{cases}$
16	$\vec{a}=(2x+z^2)\vec{i}+(3\ln(x)-2y)\vec{j}+(y-9zy)\vec{k}$	$\begin{cases}z\ge x^2+y^2;\\ z\le 4;\\ y\le 0.\end{cases}$
17	$\vec{a}=(x-z)\vec{i}+(2xy-z^2-y)\vec{j}+(5y+zx)\vec{k}$	$\begin{cases}(z-1)^2\ge x^2+y^2;\\ z\le 5;\\ x\ge 0.\end{cases}$
18	$\vec{a}=(7xy-z^3)\vec{i}+(4y^2-z)\vec{j}-(\sqrt{x}+2\sin(y))\vec{k}$	$\begin{cases}3-z\ge x^2+y^2;\\ z\ge -1;\\ y\ge 0.\end{cases}$
19	$\vec{a}=(2y-x^2)\vec{i}+(3x-\cos(z))\vec{j}+(2x+3y)\vec{k}$	$\begin{cases}(z-5)^2\ge x^2+y^2;\\ z\ge 2;\\ x\le 0.\end{cases}$
20	$\vec{a}=(3xy+2yz)\vec{i}+(\mathrm{tg}(x)+2z)\vec{j}+(x^2-y)\vec{k}$	$\begin{cases}z+1\ge x^2+y^2;\\ z\le 3;\\ y\le 0.\end{cases}$
21	$\vec{a}=(5x^2-y^2)\vec{i}+(4x+\sqrt{z})\vec{j}+(3x-xz)\vec{k}$	$\begin{cases}(z-2)^2\ge x^2+y^2;\\ z\le 6;\\ x\ge 0.\end{cases}$

Окончание табл. 5.1

1	2	3
22	$\vec{a}=(5xy+2z)\vec{i}+(y^2-4x)\vec{j}+(\cos(y)-zy)\vec{k}$	$\begin{cases} -z \ge x^2+y^2; \\ z \ge -1; \\ y \ge 0. \end{cases}$
23	$\vec{a}=(x-2z)\vec{i}+(y+zx^2)\vec{j}+(2z-4zx)\vec{k}$	$\begin{cases} (z-4)^2 \ge x^2+y^2; \\ z \ge 1; \\ x \le 0. \end{cases}$
24	$\vec{a}=(x+xy)\vec{i}+(2y-\mathrm{arctg}(z))\vec{j}+(5yz-3z)\vec{k}$	$\begin{cases} z+2 \ge x^2+y^2; \\ z \le 2; \\ y \le 0. \end{cases}$
25	$\vec{a}=(2x^2-z^2)\vec{i}+(3y-z)\vec{j}-(4z+2xz)\vec{k}$	$\begin{cases} (z-3)^2 \ge x^2+y^2; \\ z \le 7; \\ x \ge 0. \end{cases}$
26	$\vec{a}=(2xy+z)\vec{i}+(5y^2-2z)\vec{j}+(\mathrm{tg}(x)-3y)\vec{k}$	$\begin{cases} 1-z \ge x^2+y^2; \\ z \ge 0; \\ y \ge 0. \end{cases}$
27	$\vec{a}=(x^2+3y-z)\vec{i}+(3y+2z)\vec{j}+(x-3z)\vec{k}$	$\begin{cases} (z-2)^2 \ge x^2+y^2; \\ z \ge -1; \\ x \le 0. \end{cases}$
28	$\vec{a}=(x+\cos(y))\vec{i}+(3y^2-2z)\vec{j}+(2\sqrt{x}-z)\vec{k}$	$\begin{cases} z+3 \ge x^2+y^2; \\ z \le 1; \\ y \le 0. \end{cases}$
29	$\vec{a}=(x+2y^2)\vec{i}+(5xy-2z)\vec{j}+(x^2-z)\vec{k}$	$\begin{cases} (z-4)^2 \ge x^2+y^2; \\ z \le 8; \\ x \ge 0. \end{cases}$
30	$\vec{a}=(2xy-y)\vec{i}+(\ln(x)+4z)\vec{j}+(x+zy)\vec{k}$	$\begin{cases} 7-z \ge x^2+y^2; \\ z \ge 6; \\ y \ge 0. \end{cases}$

Задача 6

Работа силового поля при перемещении тела по дуге

Найти работу силового поля $\vec{F}(M)$ при перемещении тела из точки A в точку B по дуге L, лежащей в плоскости (p). Вид поля, точки начала и конца движения и его траектория заданы в табл. 6.1.

Методические рекомендации. Воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 7, с. 25.

Для вычисления работы использовать формулу для вычисления циркуляции векторного поля, записанную интегралом второго рода:

$$Ц_{\breve{AB}} = \int_{\breve{AB}} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz. \quad (6.1)$$

Адаптируя интеграл (6.1) к условиям задачи, оставить в подынтегральном выражении только одну переменную, выразив её из уравнения пути интегрирования и сведя интеграл к определённому от одной переменной.

Таблица 6.1

Варианты данных для задачи № 6

Номер варианта	Векторное поле $\vec{a} = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k}$	Точка A, точка B	Дуга L	(p)
1	2	3	4	5
1	$\vec{a} = (2y+z)\vec{i} + (5y-2x^2)\vec{j} + (\mathrm{tg}(x)-3y)\vec{k}$	(1; 1; 2) (2; 4; 2)	$y = x^2$	$z = 2$
2	$\vec{a} = (x+\cos(y))\vec{i} + (3y^2-2z)\vec{j} + (2\sqrt{x}-z)\vec{k}$	(1; 0; 0) (1; 2; 4)	$z = y^2$	$x = 1$
3	$\vec{a} = (x+2y^2)\vec{i} + (5xy-2z)\vec{j} + (x^2-z)\vec{k}$	(1; –3;2) (2; –3;4)	$z = x^2$	$y = –3$
4	$\vec{a} = (7xy-z^3)\vec{i} + (4y^2-z)\vec{j} - (\sqrt{x}+2\sin(y))\vec{k}$	(1;1; –2) (9;3; –2)	$x = y^2$	$z = –2$
5	$\vec{a} = (2xy-y)\vec{i} + (\ln(x)+4z)\vec{j} + (x+zy)\vec{k}$	(1; 4;–1) (4; 4; 2)	$x = z^2$	$y = 4$
6	$\vec{a} = (2x^2-z^2+x)\vec{i} + (3y-z)\vec{j} - (4z+2xz)\vec{k}$	(3; 4;–2) (3; 1; 1)	$y = z^2$	$x = 3$
7	$\vec{a} = (3xy+2yz)\vec{i} + (\mathrm{tg}(x)+2z)\vec{j} + (x^2-y)\vec{k}$	(2; 2; 4) (3; 2; 9)	$z = x^2$	$y = 2$
8	$\vec{a} = (5xy+2z)\vec{i} + (y^2-4x)\vec{j} + (\cos(y)-zy)\vec{k}$	(1; –1;5) (1; 1; 5)	$x = y^2$	$z = 5$
9	$\vec{a} = (x^2+2y+z)\vec{i} + (x-3y+z)\vec{j} + 3z\vec{k}$	(–2;1; 1) (–2;9; 3)	$y = z^2$	$x = –2$
10	$\vec{a} = (3xy-\sqrt{z})\vec{i} + (x^2-2y+z)\vec{j} + 2z\vec{k}$	(–3;3; 9) (–3;1; 1)	$z = y^2$	$x = –3$
11	$\vec{a} = (5x^2-y^2)\vec{i} + (4x+\sqrt{z})\vec{j} + (3x-xz)\vec{k}$	(1;–1; 1) (2;–1; 4)	$z = x^2$	$y = –1$
12	$\vec{a} = (4z-x)\vec{i} + (x-3y^2)\vec{j} + (\sin(y)+z)\vec{k}$	(1; 1; 2) (4; 2; 2)	$x = y^2$	$z = 2$

1	2	3	4	5
13	$\vec{a}=(3xy-z)\vec{i}+(y^2+z)\vec{j}-(2x+\sqrt{y})\vec{k}$	(1; 1;–6) (3; 9;–6)	$y=x^2$	$z=-6$
14	$\vec{a}=(2x+z^2)\vec{i}+(3\ln(x)-2y)\vec{j}+(y-9zy)\vec{k}$	(1;4;-1) (4;4;-2)	$x=z^2$	$y=4$
15	$\vec{a}=(x+3z)\vec{i}+(4xy+z)\vec{j}+(\sqrt{y}-z)\vec{k}$	(5; 4; 2) (5; 9; 3)	$y=z^2$	$x=5$
16	$\vec{a}=(5x^2-3y+z)\vec{i}+(2yx+z)\vec{j}+3\sqrt{x}\vec{k}$	(–1; 1;1) (4;16; 1)	$y=x^2$	$z=1$
17	$\vec{a}=(5x^2-y^2)\vec{i}+(4x+\sqrt{z})\vec{j}+(3x-xz)\vec{k}$	(0; 2; 0) (3; 2; 9)	$z=x^2$	$y=2$
18	$\vec{a}=(2x-y^2)\vec{i}+(3x+z)\vec{j}+(4x-xz)\vec{k}$	(2; –3;9) (2; –2;4)	$z=y^2$	$x=2$
19	$\vec{a}=(x-z)\vec{i}+(2xy-z^2-y)\vec{j}+(5y+zx)\vec{k}$	(4; 2; -1) (0; 0; -1)	$x=y^2$	$z=-1$
20	$\vec{a}=(x+xy)\vec{i}+(2y-\mathrm{arctg}(z))\vec{j}+(5yz-3z)\vec{k}$	(9;0; –3) (1;0; –1)	$x=z^2$	$y=0$
21	$\vec{a}=(2x^2-z)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+(2xz-z)\vec{k}$	(– 4;1;1) (– 4;9;3)	$y=z^2$	$x=-4$
22	$\vec{a}=(3xy-z)\vec{i}+(y+2z^2)\vec{j}+(7\sqrt{x}-z)\vec{k}$	(–1;1;2) (–2;4;2)	$y=x^2$	$z=2$
23	$\vec{a}=(2y-x^2)\vec{i}+(3x-\cos(z))\vec{j}+(2x+3y)\vec{k}$	(0; –5;0) (2; –5;4)	$z=x^2$	$y=-5$
24	$\vec{a}=(x+2y^2-z)\vec{i}+(x-y-\sqrt{z})\vec{j}+6zx\vec{k}$	(–1;1;1) (–1;9;3)	$z=y^2$	$x=-1$
25	$\vec{a}=(5x+z)\vec{i}+(y+2y^2)\vec{j}+(y-6z)\vec{k}$	(1;1;–3) (4;2;–3)	$x=y^2$	$z=-3$
26	$\vec{a}=(xy+2z)\vec{i}+(xy+y^2)\vec{j}+(2y-xz)\vec{k}$	(9;1;-3) (4; 1; 2)	$x=z^2$	$y=1$
27	$\vec{a}=(3x-2z)\vec{i}+(2x-7xy-y)\vec{j}+(2y+z)\vec{k}$	(0; 9;–3) (0; 4;–2)	$y=z^2$	$x=0$
28	$\vec{a}=(x-2z)\vec{i}+(y+zx^2)\vec{j}+(2z-4zx)\vec{k}$	(1; 1; 1) (2; 4; 1)	$y=x^2$	$z=1$
29	$\vec{a}=(y-2x)\vec{i}+(2x+y^2-z)\vec{j}+2z\vec{k}$	(–2;6; 4) (1 ; 6; 1)	$z=x^2$	$y=6$
30	$\vec{a}=(x-2y+z)\vec{i}+(3yx-z)\vec{j}+(2x-y-z)\vec{k}$	(4;-2; 4) (4; 2; 4)	$z=y^2$	$x=4$

З а д а ч а 7

Циркуляция векторного поля, вычисленная непосредственно и с помощью формулы Стокса

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по треугольнику ABC двумя способами: непосредственным вычислением и с помощью формулы Стокса. Вид поля и вершины треугольника заданы в табл. 7.1.

Методические рекомендации. Для непосредственного вычисления циркуляции воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 8, с. 25.

Сделать чертёж. Разбив треугольник на три участка интегрирования, вычислить циркуляцию на каждом участке по формуле (6.1) и сложить полученные значения. При сведении криволинейного интеграла к определённому иметь в виду, что каждый участок интегрирования лежит на прямой, уравнение которой удобнее всего записать «в отрезках».

Для вычисления циркуляции с помощью формулы Стокса, воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 11, с. 30.

Рассчитав ротор по правилу

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \tag{7.1}$$

подставить полученный результат в поверхностный интеграл

$$Ц = \iint_S (rot\vec{a}, d\vec{S}), \tag{7.2}$$

считая поверхность, натянутую на контур треугольника ABC, плоскостью. Вычислив интеграл, сравнить значения циркуляции, полученные разными способами.

Таблица 7.1

Варианты данных для задачи № 7

Номер варианта	Векторное поле $\vec{a} = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k}$	Вершины треугольника A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2), C(x_3;y_3;z_3)
1	2	3
1	$\vec{a} = 2y\vec{i} + 3z\vec{j} - y\vec{k}$	A(3;0;0), B(0;–2;0), C(0;0;4)
2	$\vec{a} = 2z\vec{i} + 3z\vec{j} - x\vec{k}$	A(2;0;0), B(0;1;0), C(0;0;–3)
3	$\vec{a} = y\vec{i} + 3x\vec{j} - 2x\vec{k}$	A(–1;0;0), B(0;4;0), C(0;0;2)
4	$\vec{a} = 4y\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k}$	A(–4;0;0), B(0;3;0), C(0;0;1)
5	$\vec{a} = 4z\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$	A(5;0;0), B(0;6;0), C(0;0;2)
6	$\vec{a} = 3y\vec{i} + z\vec{j} - 2y\vec{k}$	A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;–1)
7	$\vec{a} = -2z\vec{i} + z\vec{j} - x\vec{k}$	A(4;0;0), B(0;–1;0), C(0;0;3)
8	$\vec{a} = 5y\vec{i} - 2x\vec{j} + 2x\vec{k}$	A(–3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;4)
9	$\vec{a} = y\vec{i} + 4y\vec{j} + 6x\vec{k}$	A(–1;0;0), B(0;5;0), C(0;0;1)
10	$\vec{a} = 6z\vec{i} - 2y\vec{j} - 5z\vec{k}$	A(2;0;0), B(0;8;0), C(0;0;4)
11	$\vec{a} = 4y\vec{i} - 3z\vec{j} + 2y\vec{k}$	A(–1;0;0), B(0;5;0), C(0;0;2)
12	$\vec{a} = 2z\vec{i} + 3z\vec{j} + x\vec{k}$	A(–1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)
13	$\vec{a} = y\vec{i} - 6x\vec{j} + 2x\vec{k}$	A(9;0;0), B(0;2;0), C(0;0;–3)
14	$\vec{a} = -2y\vec{i} + 3y\vec{j} + x\vec{k}$	A(8;0;0), B(0;2;0), C(0;0;1)
15	$\vec{a} = 8z\vec{i} - 4y\vec{j} - 3z\vec{k}$	A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;5)
16	$\vec{a} = 5y\vec{i} - 2z\vec{j} + 4y\vec{k}$	A(–2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;1)
17	$\vec{a} = 4z\vec{i} - 3z\vec{j} + 2x\vec{k}$	A(3;0;0), B(0;–2;0), C(0;0;2)
18	$\vec{a} = 3y\vec{i} - 4x\vec{j} + x\vec{k}$	A(5;0;0), B(0;7;0), C(0;0;–3)
19	$\vec{a} = -y\vec{i} + 5y\vec{j} + 5x\vec{k}$	A(4;0;0), B(0;6;0), C(0;0;1)
20	$\vec{a} = 2z\vec{i} - y\vec{j} - 2z\vec{k}$	A(–6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;2)
21	$\vec{a} = -y\vec{i} + 4z\vec{j} + 3y\vec{k}$	A(–3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;5)
22	$\vec{a} = z\vec{i} - 5z\vec{j} + 4x\vec{k}$	A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)
23	$\vec{a} = 6y\vec{i} - x\vec{j} + 2x\vec{k}$	A(2;0;0), B(0;8;0), C(0;0;–1)
24	$\vec{a} = -2y\vec{i} + y\vec{j} + 7x\vec{k}$	A(5;0;0), B(0;3;0), C(0;0;3)

Окончание табл. 7.1

1	2	3
25	$\vec{a}=5z\vec{i}-4y\vec{j}+6z\vec{k}$	A(–1;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6)
26	$\vec{a}=-2y\vec{i}+z\vec{j}+3y\vec{k}$	A(4;0;0), B(0;–1;0), C(0;0;2)
27	$\vec{a}=3z\vec{i}+z\vec{j}-4x\vec{k}$	A(3;0;0), B(0;–2;0), C(0;0;1)
28	$\vec{a}=4y\vec{i}-3x\vec{j}+6x\vec{k}$	A(1;0;0), B(0;5;0), C(0;0;–5)
29	$\vec{a}=-5y\vec{i}+2y\vec{j}+2x\vec{k}$	A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;2)
30	$\vec{a}=z\vec{i}-6y\vec{j}+5z\vec{k}$	A(–4;0;0), B(0;1;0), C(0;0;3)

Задача 8

Плотность циркуляции векторного поля

Найти плотность циркуляции векторного поля $\vec{a}$ (M) в точке M в направлении вектора $\vec{n}$. Вид поля, координаты точки и вектор направления заданы в табл. 8.1.

Методические рекомендации. Воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 9, с. 29.

По правилу (7.1) вычислить ротор и найти его значение в заданной точке M, затем найти проекцию ротора на направление вектора $\vec{n}$, скалярно умножив его на орт заданного направления.

Таблица 8.1

Варианты данных для задачи № 8

Номер варианта	Векторное поле $\vec{a}=a_x(x;y;z)\vec{i}+a_y(x;y;z)\vec{j}+a_z(x;y;z)\vec{k}$	Точка $M(x;y;z)$	Направление $\vec{n}$
1	$\vec{a}=(x-2y)\vec{i}+(3yx-z)\vec{j}+(5x-z)\vec{k}$	(–1; 2; 5)	$-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$
2	$\vec{a}=(xy-z)\vec{i}+(4y+z)\vec{j}+(x-yz)\vec{k}$	(1;–2;–3)	$4\vec{i}+7\vec{j}-4\vec{k}$
3	$\vec{a}=(x+2y^2)\vec{i}+(x-z^2)\vec{j}+6zx\vec{k}$	(4; 0;–2)	$6\vec{i}-9\vec{j}+2\vec{k}$
4	$\vec{a}=(2xy-z^2)\vec{i}+(x^2-2y)\vec{j}+2z\vec{k}$	(–7;1;–4)	$\sqrt{7}\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$
5	$\vec{a}=(x^2+4z)\vec{i}+(x-3y)\vec{j}+2zy\vec{k}$	(–8;–2;1)	$\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

1	2	3	4
6	$\vec{a}=(yz-2x)\vec{i}+(2x+y^2)\vec{j}+2z\vec{k}$	(3; 4;–1)	$\sqrt{3}\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$
7	$\vec{a}=(x^2+3z)\vec{i}+(xy+z)\vec{j}+(y^2-z)\vec{k}$	(–9; 1; 8)	$-4\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k}$
8	$\vec{a}=(7z-x)\vec{i}+(x-3y^2)\vec{j}+5yz\vec{k}$	(–6; 5; 0)	$\sqrt{15}\vec{i}-2\vec{j}+9\vec{k}$
9	$\vec{a}=5xz\vec{i}+(4x-y+2y^2)\vec{j}+(y-6z)\vec{k}$	(–1;–2;3)	$2\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$
10	$\vec{a}=(3xy+z)\vec{i}+(xy+2y^2)\vec{j}+2xz\vec{k}$	(–3;1;–1)	$\sqrt{2}\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$
11	$\vec{a}=(5x+y)\vec{i}+(3yz-z)\vec{j}+(5x^2-z)\vec{k}$	(0; 1;–6)	$-7\vec{i}+\sqrt{6}\vec{j}+3\vec{k}$
12	$\vec{a}=(xz-z)\vec{i}+(3y^2+z)\vec{j}+(x-yz)\vec{k}$	(5; 2;–1)	$\sqrt{35}\vec{i}+\vec{j}-8\vec{k}$
13	$\vec{a}=(4x+y^2)\vec{i}+(x-zy)\vec{j}+zx\vec{k}$	(1; 0;–2)	$\sqrt{8}\vec{i}+8\vec{j}-3\vec{k}$
14	$\vec{a}=(6x-z^2)\vec{i}+(x-2y)\vec{j}+2xy\vec{k}$	(–5; 1; 2)	$2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$
15	$\vec{a}=(x^2-z)\vec{i}+(x-xy)\vec{j}+4zy\vec{k}$	(–8; 2; 1)	$-9\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$
16	$\vec{a}=(3yz-x)\vec{i}+(2z+y^2)\vec{j}+z\vec{k}$	(5; 1;–2)	$-7\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$
17	$\vec{a}=(x+3z^2)\vec{i}+(2yz+z)\vec{j}+y^2z\vec{k}$	(–12;0;1)	$\sqrt{2}\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$
18	$\vec{a}=(5z-zx)\vec{i}+xy\vec{j}+3yz\vec{k}$	(1;–2; 3)	$-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$
19	$\vec{a}=6z\vec{i}+(4x-y+2y^2)\vec{j}+6xz\vec{k}$	(4; 7;–1)	$\sqrt{10}\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$
20	$\vec{a}=(3y^2+z)\vec{i}+(xy+2y)\vec{j}-xz\vec{k}$	(–4;1;–3)	$\sqrt{14}\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$
21	$\vec{a}=-2y^2\vec{i}+(y-zx)\vec{j}+(5x+y)\vec{k}$	(3;–4; 0)	$-2\vec{i}+6j-9\vec{k}$
22	$\vec{a}=(xy+4z)\vec{i}+(y+z^2)\vec{j}+yz\vec{k}$	(2;–5; 1)	$4\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$
23	$\vec{a}=(x+2y)\vec{i}+(xy-z^2)\vec{j}+4zx\vec{k}$	(–9;–6;1)	$2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$
24	$\vec{a}=(y-3z^2)\vec{i}+(x-2y)\vec{j}+2xy\vec{k}$	(–2; 1; 1)	$-2\vec{i}+8\vec{j}+\sqrt{13}\vec{k}$
25	$\vec{a}=(x^2-y)\vec{i}+(x-3yz)\vec{j}+4zy\vec{k}$	(–13;2;0)	$-5\vec{i}+\sqrt{7}\vec{j}-2\vec{k}$
26	$\vec{a}=(yz-x+z)\vec{i}+(x+3y^2)\vec{j}+2x\vec{k}$	(3; 2;–1)	$\sqrt{15}\,\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$
27	$\vec{a}=(x^2+y)\vec{i}+(xy+z)\vec{j}+(y^2-5x)\vec{k}$	(9; 1;–7)	$-8\vec{i}+6\vec{j}$
28	$\vec{a}=(z-6x)\vec{i}+(x-y^2)\vec{j}+5xy\vec{k}$	(1; 0;–8)	$-4\vec{i}+7\vec{j}+4\vec{k}$
29	$\vec{a}=3yz\vec{i}+(y+2y^2)\vec{j}-5x\vec{k}$	(–7;1;–1)	$\sqrt{3}\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$
30	$\vec{a}=(2y+z)\vec{i}+(xy+3y^2)\vec{j}+5xz\vec{k}$	(8; 6; 1)	$\sqrt{3}\vec{i}-5\vec{j}+6\vec{k}$

Задача 9

Циркуляция потенциального векторного поля. Разность потенциалов

По заданной потенциальной функции $U = U(x; y; z)$ найти векторное поле, его циркуляцию от точки A до точки B по двум разным путям интегрирования: по дуге параболы L в заданной плоскости p и по пространственной прямой, соединяющей эти точки. Сравнить полученные результаты с разностью значений потенциальной функции в этих точках. Потенциальная функция, координаты точек, уравнение параболы и плоскость, в которой она находится, заданы в табл. 9.1.

Методические рекомендации. Воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 12, с. 33.

По заданной потенциальной функции потенциальное векторное поле определяется как градиент от неё:

$$\vec{a}_n = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U(x;y;z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \qquad (9.1)$$

Циркуляция от точки A до точки B вычисляется с помощью интеграла второго рода по формуле (6.1) двумя способами – по дуге параболы и по прямой. Оба интеграла должны оказаться одинаковыми и равными разности потенциалов:

$$Ц_{\overset{\smile}{\mathrm{AB}}} = Ц_{|AB|} = U(B) - U(A). \qquad (9.2)$$

Таблица 9.1

Варианты данных для задачи № 9

Номер варианта	Потенциальное поле $U(x; y; z)$	Точка A	Точка B	Уравнение дуги L	Плоскость p
1	2	3	4	5	6
1	$U = 3xz^2 - 2yz$	(–1; 2; 1)	(–1; 5; 2)	$y = z^2+1$	$x = -1$
2	$U = 4xz + 2y^3$	(3; 6; 7)	(1; 6; –1)	$z = x^2 - 2$	$y = 6$
3	$U = 3xy^2 - 4zx$	(0; 3; –3)	(2; 7; –3)	$y = x^2 + 3$	$z = -3$
4	$U = xz^3 + 7y$	(3;– 2; 1)	(3;– 3; 6)	$z = y^2 - 3$	$x = 3$
5	$U = 2xz^2 - 5yz$	(3; –3; 1)	(6; –3; 2)	$x = z^2 + 2$	$y = -3$
6	$U = 3yz + 2xy^2$	(5; –2; 2)	(2; 1; 2)	$x = y^2 + 1$	$z = 2$
7	$U = 2xy^2 - 4zx$	(4; –3; 1)	(4; 5; 3)	$y = z^2 - 4$	$x = 4$

Окончание табл. 9.1

1	2	3	4	5	6
8	$U = 5xz^2 + 3yx$	(–2; 3; 1)	(0; 3; –3)	$z = x^2 - 3$	$y = 3$
9	$U = 4yz^2 - 2yx$	(2; 6; –3)	(1; 3; –3)	$y = x^2 + 2$	$z = -3$
10	$U = 5xz + 2y^3$	(1; 3; 8)	(1; 0; –1)	$z = y^2 - 1$	$x = 1$
11	$U = 6xy^2 - 4zx$	(3; 1; 1)	(10; 1; 3)	$x = z^2 + 1$	$y = 1$
12	$U = xz^3 + 3yx$	(2; 2; 3)	(7; 3; 3)	$x = y^2 - 2$	$z = 3$
13	$U = 2xz^2 - 5yz$	(–1; 1; 2)	(–1; 6; 3)	$y = z^2 - 3$	$x = -1$
14	$U = 3xz + y^3$	(–2; 4; 3)	(3; 4; 8)	$z = x^2 - 1$	$y = 4$
15	$U = 4xy^2 - 2zx$	(0; 4; 1)	(2; 8; 1)	$y = x^2 + 4$	$z = 1$
16	$U = 5xz^3 + 3yx$	(2; 1; 4)	(2; –2; 7)	$z = y^2 + 3$	$x = 2$
17	$U = 6xz^2 - yz$	(2; 7; 1)	(5; 7; 2)	$x = z^2 + 1$	$y = 7$
18	$U = xz^2 + 6y^3$	(3; –2; 3)	(8; 3; 3)	$x = y^2 - 1$	$z = 3$
19	$U = 2xy^2 - zx$	(1; 2;–2)	(1; 7;–3)	$y = z^2 - 2$	$x = 1$
20	$U = 3xz^3 + 2yx$	(0; 2; 3)	(–1; 2; 4)	$z = x^2 + 3$	$y = 2$
21	$U = 4xz^2 - 3yz$	(–1; 2; 4)	(4; 3; 4)	$y = x^2 - 5$	$z = 4$
22	$U = 5xz + 4y^2$	(5; –1; 2)	(5; 3; 10)	$z = y^2 + 1$	$x = 5$
23	$U = 6xy^2 - zx$	(3; 4; 0)	(7; 4; 2)	$x = z^2 + 3$	$y = 4$
24	$U = xz^3 + 5yx$	(8; 3;–2)	(0; 1;–2)	$x = y^2 - 1$	$z = -2$
25	$U = 2xz^2 - 3yz$	(3; –1; 1)	(3; 7; 3)	$y = z^2 - 2$	$x = 3$
26	$U = 3yz + 4x^3$	(–2; 4; 3)	(1; 4; 0)	$z = x^2 - 1$	$y = 4$
27	$U = 4xy^2 - zx$	(–2; 1; 4)	(0; 1; –3)	$y = x^2 - 3$	$z = 4$
28	$U = 5xz^3 + 2yx$	(1 ; –1; 4)	(1 ; 2; 7)	$z = y^2 + 3$	$x = 1$
29	$U = 6yz^2 - 2yz$	(5; 1; –2)	(10; 1; 3)	$x = z^2 + 1$	$y = 1$
30	$U = 2xz^2 - 5yz$	(–1; 2; 2)	(11; 4; 2)	$x = y^2 - 5$	$z = 2$

Задача 10

Разложение векторного поля на потенциальную и соленоидальную составляющие

Разложить заданное в табл. 10 векторное поле $\vec{a}(M)$ на потенциальную $\vec{a}_n(M)$ и соленоидальную $\vec{a}_c(M)$ составляющие. Проверить равенство нулю ротора потенциальной и дивергенции соленоидальной составляющих.

Методические рекомендации. Воспользоваться разобранной задачей из учебно-методического пособия «Элементы теории поля» [1] – пример № 14, с. 38.

Из уравнения Пуассона

$$\Delta U(M) = \operatorname{div} \vec{a}(M) \tag{10.1}$$

найти произвольное решение для потенциальной функции $U(M)$. Градиент этой функции, вычисленный по формуле (9.1), будет потенциальной компонентой поля. Вычитая из данного векторного поля найденную потенциальную компоненту, получим соленоидальную.

Ротор потенциальной составляющей можно найти по формуле (7.1), и он должен оказаться равным нулю.

Дивергенцию соленоидальной составляющей можно вычислить исходя из определения дивергенции

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}, \tag{10.2}$$

и она тоже должна оказаться равной нулю.

Сумма потенциальной $\vec{a}_n(M)$ и соленоидальной $\vec{a}_c(M)$ составляющих должна быть равна данному векторному полю $\vec{a}(M)$.

Таблица 10.1

Варианты данных для задачи № 10

Номер варианта	Поле $\vec{a}(M)$	Номер варианта	Поле $\vec{a}(M)$
1	2	3	4
1	$\vec{a} = (x^2 + 2x)\vec{i} - 2xy\vec{j} + z\vec{k}$	9	$\vec{a} = 2x\vec{i} + y^2\vec{j} + (z^2 - 2yz)\vec{k}$
2	$\vec{a} = 3x\vec{i} + (y + xy)\vec{j} - xz\vec{k}$	10	$\vec{a} = (2xz + 5x)\vec{i} + 3y\vec{j} - z^2\vec{k}$
3	$\vec{a} = x^2\vec{i} + 2y\vec{j} + (z^2 - xz)\vec{k}$	11	$\vec{a} = 2xy\vec{i} + (2y - y^2)\vec{j} + z^2\vec{k}$
4	$\vec{a} = (2xz + x)\vec{i} + y^2\vec{j} - z^2\vec{k}$	12	$\vec{a} = -3x\vec{i} + xy\vec{j} + (2z^2 - xz)\vec{k}$
5	$\vec{a} = xz\vec{i} + (2y - yz)\vec{j} + 3z\vec{k}$	13	$\vec{a} = (x^2 + 5x)\vec{i} + 3y^2\vec{j} - xz\vec{k}$
6	$\vec{a} = xy\vec{i} + 3y\vec{j} + (5z - yz)\vec{k}$	14	$\vec{a} = 4x\vec{i} + (3y^2 + 2yz)\vec{j} - z^2\vec{k}$
7	$\vec{a} = (2xy + 3x)\vec{i} - y^2\vec{j} - z^2\vec{k}$	15	$\vec{a}_c = 2xz\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z^2\vec{k}$
8	$\vec{a} = -x\vec{i} + (y^2 + xy)\vec{j} - xz\vec{k}$	16	$\vec{a} = 6x\vec{i} + 4y^2\vec{j} - 2yz\vec{k}$

Окончание табл. 10.1

1	2	3	4
17	$\vec{a}=(xz+x)\vec{i}-yz\vec{j}+3z\vec{k}$	24	$\vec{a}_c=3x\vec{i}+2yz\vec{j}+z^2\vec{k}$
18	$\vec{a}=2x\vec{i}+(y^2+2yz)\vec{j}-z^2\vec{k}$	25	$\vec{a}=(xy-x)\vec{i}+y^2\vec{j}-yz\vec{k}$
19	$\vec{a}=2xz\vec{i}+y^2\vec{j}+(z-z^2)\vec{k}$	26	$\vec{a}=xy\vec{i}+2y\vec{j}+(z^2-yz)\vec{k}$
20	$\vec{a}=x\vec{i}+2yz\vec{j}+z^2\vec{k}$	27	$\vec{a}=(xy-3x)\vec{i}+y\vec{j}-yz\vec{k}$
21	$\vec{a}=(x^2-x)\vec{i}+2y\vec{j}-xz\vec{k}$	28	$\vec{a}=4x\vec{i}+xy\vec{j}+(3z-xz)\vec{k}$
22	$\vec{a}=x^2\vec{i}+(y-2xy)\vec{j}+4z\vec{k}$	29	$\vec{a}=x\vec{i}+2y^2\vec{j}-2yz\vec{k}$
23	$\vec{a}=x^2\vec{i}+2y\vec{j}+(2z-xz)\vec{k}$	30	$\vec{a}=-x\vec{i}+y^2\vec{j}+(z^2-2yz)\vec{k}$

Библиографический список

1. Фёдоров, В. А. Элементы теории поля : учебно-методическое пособие / В. А. Фёдоров, Е. А. Швед. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2021. – 40 с. – Текст : непосредственный.

2. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу : учебник / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. – Москва : Дрофа, 2004. – 642 с. – Текст : непосредственный.

3. Сборник задач по высшей математике / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Федина. – 6-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2007. – 592 с. – Текст : непосредственный.

4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 8-е изд. – Москва : Физматлит, 2003. – Т. 3. – 728 с. – Текст : непосредственный.

5. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : учебник : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2004. – Ч. 2. – 464 с. – Текст : непосредственный.

6. Гершанок, В. А. Теория поля : учебник для бакалавров / В. А. Гершанок, Н. И. Дергачев. – Москва : Юрайт, 2019. – 278 с. – Текст : непосредственный.

Учебное издание

ФЁДОРОВ Владимир Алексеевич,
ШВЕД Елена Анатольевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 25.02.2021. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,7. Уч.-изд. л. 1,9.
Тираж 50 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35