Е. А. ШВЕД, О. В. ГАТЕЛЮК, В. Г. ШАНТАРЕНКО

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ: ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

ОМСК 2021

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Е. А. Швед, О. В. Гателюк, В. Г. Шантаренко

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ: ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия по математике

Омск 2021

УДК 517.443(075.8)
ББК 22.161.2я73
Ш34

Интеграл Фурье: типовые расчеты: Учебно-методическое пособие по математике / Е. А. Швед, О. В. Гателюк, В. Г. Шантаренко; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2021. 40 с.

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с действующими рабочими программами дисциплины «Математика» для студентов второго курса технических специальностей и направлений подготовки.

Пособие включает в себя теоретические сведения об интегралах Фурье раздела «Элементы гармонического анализа» дисциплины «Математика» и содержит 30 вариантов заданий типовых расчетов по теме «Интеграл Фурье», дополненных образцами-примерами их решения, указывающими алгоритмы получения решения и призванными помочь обучающимся в оформлении решения.

Предназначено для индивидуальной самостоятельной работы студентов второго курса технических специальностей и направлений подготовки всех форм обучения.

Библиогр.: 4 назв. Рис. 4.

Рецензенты: канд. пед. наук, доцент Н. В. Манюкова;
канд. физ.-мат. наук, доцент Ю. М. Сосновский.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие представляет собой материалы для индивидуальной самостоятельной работы студентов второго курса, обучающихся по техническим специальностям и направлениям подготовки. Материал пособия может быть использован при изучении раздела «Элементы гармонического анализа» дисциплины «Математика».

Раздел «Интеграл Фурье» служит логическим продолжением раздела «Ряды Фурье», поэтому предварительно следует изучить учебный материал из методических указаний, подготовленных доцентом Окишевым С. В. и старшим преподавателем Галич Ю. Г. [1].

В первом разделе данного пособия приведены краткие теоретические сведения об интегралах Фурье, позволяющие обосновать используемые при решении задач формулы.

Второй раздел содержит 30 вариантов заданий типового расчета по теме «Интеграл Фурье». Задания представлены в двух вариантах: базовом (предназначенном для освоения минимально допустимого уровня подготовки по разделу) и продвинутом (предназначенном для более серьезного уровня подготовки по данному разделу дисциплины «Математика»). Двухуровневые задания позволяют преподавателю реализовать индивидуальный подход к обучающимся при формировании набора заданий для самостоятельной работы.

В третьем разделе приведены подробные образцы-примеры решения заданий типового расчета, которые могут не только служить руководством к действию при выборе методов решения задач, но и быть образцом оформления решения.

Материал пособия позволяет сформировать основную компетенцию: способность решать инженерные задачи с использованием методов математического анализа и моделирования и привить навыки использования гармонического анализа в профессиональной деятельности.

При формировании заданий типового расчета были использованы задачи, применяемые в учебном процессе преподавателями кафедры «Высшая математика» в течение ряда лет, что позволило обеспечить их апробацию и подтвердить практическую значимость для формирования необходимых умений и навыков при изучении раздела «Элементы гармонического анализа».

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИНТЕГРАЛАХ ФУРЬЕ

1.1. Понятие об абсолютно интегрируемых функциях

Определение. Пусть $f(x)$ функция, заданная на всей действительной оси, тогда $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой, если интеграл от ее модуля ограничен, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$.

Примеры:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ – абсолютно интегрируема;

2) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ – не является абсолютно интегрируемой.

(Проверить самостоятельно по определению).

Приведем ниже условия, позволяющие решать вопрос об абсолютной интегрируемости функции без вычисления интеграла.

Условия абсолютной интегрируемости: Если функция $f(x)$, заданная на всей действительной числовой оси, удовлетворяет следующим трем условиям: 1) $f(x)$ ограничена; 2) $f(x)$ кусочно-непрерывна; 3) $f(x)$ отлична от нуля на конечном промежутке, то $f(x)$ абсолютно интегрируема.

1.2. Интеграл Фурье в действительной форме

Пусть $f(t)$ непериодическая функция, удовлетворяющая условию Дирихле (см. теорему 2 на с. 19 в работе [1]) в интервале $(-l, l)$, тогда в точках непрерывности $f(t)$ представима рядом Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n t}{l}\right); \qquad (**)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt; \quad a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}dt.$$

Предположим, что $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей оси Ot, т. е.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left|f(t)\right|dt<\infty(=M)$ существует и конечен, изменим в формулах для a_0, a_n, b_n переменную интегрирования $t\to z$ и подставим их выражения в формулу $(**)$:

$$f(t)=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(z)dz+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(z)\cos\frac{\pi nz}{l}dz\cdot\cos\frac{\pi nt}{l}+\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(z)\sin\frac{\pi nz}{l}dz\cdot\sin\frac{\pi nz}{l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(z)dz+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(z)\cdot\underbrace{\left[\cos\frac{\pi nz}{l}\cdot\cos\frac{\pi nt}{l}+\sin\frac{\pi nz}{l}\cdot\sin\frac{\pi nt}{l}\right]}_{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)}dz=$$

$$=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(z)dz+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(z)\cos\frac{\pi n}{l}(z-t)\,dz.$$

Устремим l в бесконечность: $l\to\infty$:

$\left|\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(z)dz\right|\le\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}\left|f(z)\right|dz\le\frac{1}{2l}\cdot M=\frac{M}{2l}\underset{l\to\infty}{\to}0,$ так как $f(z)$ абсолютно интегрируема.

Рассмотрим последовательность угловых частот гармоник $\mathrm{Cos}\frac{\pi n}{l}(z-t)$,

$\omega_n=\frac{\pi n}{l}$, т. е. $\omega_1=\frac{\pi}{l}$, $\omega_2=\frac{2\pi}{l},\ldots\quad\Rightarrow\quad\Delta\omega=\frac{\pi}{l}$, причем при $l\to\infty$ имеем $\Delta\omega\to 0$ (т. е. $\Delta\omega$ является бесконечно малой при $l\to\infty$), таким образом, при стремлении $l\to\infty$ угловые частоты ω_n будут постепенно заполнять всю ось, а дискретный спектр перейдет в непрерывный.

Так как $\Delta\omega=\frac{\pi}{l}\Rightarrow\frac{1}{l}=\frac{\Delta\omega}{\pi}$, $\frac{\pi n}{l}=n\cdot\Delta\omega=\omega_n$, частота n-й гармоники

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta\omega}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega_n(z-t)dz\underset{l\to\infty}{\to}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega(z-t)dz\right)d\omega$ (здесь $\Delta\omega\to 0$ отождествляется с $d\omega$). Получаем формулу:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega(z-t)dz\right)d\omega.\qquad(ИФДФ-I)$$

Определение. Интеграл в правой части формулы $(ИФДФ-I)$ называется интегралом Фурье в действительной форме.

$\cos\omega(t-z)=\cos\omega t\cdot\cos\omega z+\sin\omega t\cdot\sin\omega z\quad\Rightarrow\quad\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega(t-z)\,dz=$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega t\cdot\cos\omega z\,dz+\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\sin\omega t\cdot\sin\omega z\,dz=\cos\omega t\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega z\,dt+$$

$$+\sin\omega t\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\sin\omega z\,dz.$$

Введем обозначения: $\begin{matrix}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega z\,dz=a(\omega)\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega z\,dz=b(\omega)\end{matrix}$ $\Rightarrow$ формула $(ИФДФ-I)$ перепишется в виде: $\int_{0}^{+\infty}\left(a(\omega)\cos\,\omega t+b(\omega)\sin\,\omega t\right)d\omega\ (ИФДФ-II).$

Замечание. Аналогия интеграла Фурье с рядом Фурье $(**)$, примененного для $l=2\pi,$ очевидна: в обоих случаях $f(t)$ раскладывается в сумму гармоник. В ряде Фурье суммирование производится по индексу $n,$ принимающему дискретные значения $n=1,\,2,\,3,\ldots,$ вследствие чего гармоники ряда имеют частоты, отличающиеся на величину, кратную $\Delta\omega.$ В интеграле Фурье производится интегрирование по непрерывной переменной $\omega,$ а коэффициенты $a(\omega),\ b(\omega)$ есть функции переменной $\omega,$ которая изменяется непрерывно. В ряде Фурье $a_n(n),\ b_n(n)$ – функции дискретной переменной n. Таким образом, частоты смежных гармоник в *ИФДФ* непрерывно переходят одна в другую, т. е. отличаются на бесконечно малую.

1.3. Теорема Дирихле о сходимости интеграла Фурье

Пусть $f(t)$ – абсолютно интегрируемая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле: 1) $f(t)$ ограничена; 2) $f(t)$ кусочно-монотонна; 3) $f(t)$ непериодическая. Тогда $f(t)$ представима *ИФДФ*, который сходится

а) к $f(t)$ в точках непрерывности;

б) к $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ в точках разрыва 1-го рода.

Замечание. Условия теоремы Дирихле являются достаточными, но не являются необходимыми. Фактически интеграл в $(ИФДФ-I)$ «неберущийся», но теорема Дирихле позволяет находить его значение.

1.4. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций. Синус- и косинус-преобразования Фурье

Пусть $f(t)$ − четная функция $\Rightarrow b(\omega)=0,\ \ a(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega t\left(\int_0^{\infty} f(z)\cos\omega z\,dz\right)d\omega.$$

Введем обозначения: $F_c(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} f(z)\cos\omega z\,dz$ – прямое косинус-преобразование Фурье.

$f(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega$ – обратное косинус-преобразование Фурье.

Пусть $f(t)$ − нечетная функция $\Rightarrow\ a(\omega)=0\quad b(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(z)\sin\omega z\,dz.$

Введем обозначение: $F_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} f(z)\sin\omega z\,dz$ – прямое синус-преобразование Фурье.

$f(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\,d\omega$ – обратное синус-преобразование Фурье.

1.5. Интеграл Фурье в комплексной форме

Формула Эйлера: $\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}$.

Доказательство: разложим $e^{j\varphi}$ по формуле Тейлора – Маклорена в ряд:

$$e^{j\varphi}=1+(j\varphi)+\frac{(j\varphi)^2}{2!}+\frac{(j\varphi)^3}{3!}+\ldots+\frac{(j\varphi)^n}{n!}+\ldots=\left|\begin{array}{c} j=j^5=j^9=j^{4k+1}=j \\ j^2=j^6=j^{10}=l^{4k+2}=-1 \\ j^3=j^7=j^{11}=j^{4k+3}=-j \\ j^4=j^8=j^{4k}=1 \end{array}\right|=$$

$$=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots+j\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\ldots\right)=\cos\varphi+j\sin\varphi.$$

Следствия: $\cos\varphi=\dfrac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2},\ \sin\varphi=\dfrac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}.$

Рассмотрим ряд Фурье $(**)$ $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nt}{l}+b_n\sin\frac{\pi nt}{l}\right)$ и обозначим $\frac{\pi n}{l}=\omega_n$ $\Rightarrow$ $\cos\omega_n t=\frac{e^{j\omega_n t}+e^{-j\omega_n t}}{2}$ $\sin\omega_n t=\frac{e^{j\omega_n t}-e^{-j\omega_n t}}{2}$. Тогда $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{j\omega_n t}+e^{-j\omega_n t}}{2}+b_n\frac{e^{j\omega_n t}-e^{j\omega_n t}}{2j}\cdot\frac{j}{j}\right)$. Перегруппировав слагаемые, получим: $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{j\omega_n t}\underbrace{\frac{a_n-b_n j}{2}}_{C_n}+e^{j\omega_n t}\underbrace{\frac{a_n+b_n j}{2}}_{C_{-n}}\right)$ или $f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n\cdot e^{j\omega_n t}$,

где $C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\omega_n t\,dt-j\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\omega_n t\,dt=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\omega_n t-j\sin\omega_n t\right]dt=$ $=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-j\omega_n t}\,dt$. Аналогично $C_{-n}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{j\omega_n t}\,dt$.

Амплитудный спектр найдем как удвоенный модуль C_n.

Аналогично получению интеграла Фурье из ряда Фурье $(**)$ устремим $l\to+\infty$ $\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{j\omega t}\,dt\right)d\omega.$ $\quad$ (*ИФДФ*)

В силу симметрии интеграла Фурье в комплексной форме его записывают в виде преобразования Фурье.

$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{j\omega t}\,dt$ – преобразование Фурье функции $f(t)$, т. е. прямое преобразование Фурье.

$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{-j\omega t}\,d\omega$ – преобразование Фурье функции $F(\omega)$, т. е. обратное преобразование Фурье.

$F^*(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt$ – прямое преобразование Фурье в симметричной форме.

$f^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F^*(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$ – обратное преобразование Фурье в симметричной форме.

Замечание. Для выполнения преобразования Фурье функция $f(t)$ должна быть абсолютно интегрируемой, функцию $F(\omega)$ называют спектральной плотностью.

1.6. Амплитудный и фазовый непрерывные спектры сигнала

Рассмотрим формулу $(ИФДФ-II)$ $f(x)=\int\limits_0^{\infty}\big(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x\big)d\omega.$

Учитывая, что $a(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$ и $b(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt,$ запишем формулу для вычисления амплитудного непрерывного спектра сигнала:

$A(\omega)=\sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)}$.

Фазовый непрерывный спектр сигнала вычисляется либо по формуле

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\arccos\dfrac{a(\omega)}{A(\omega)}, & b(\omega)\ge 0;\\ -\arccos\dfrac{a(\omega)}{A(\omega)}, & b(\omega)<0,\end{cases}$$

либо по формуле

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{b(\omega)}{a(\omega)}, & a(\omega)\ge 0;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{b(\omega)}{a(\omega)}, & a(\omega)<0,\ b(\omega)>0;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{b(\omega)}{a(\omega)}, & a(\omega)<0,\ b(\omega)<0;\\ \dfrac{\pi}{2}\ \text{при}\ a(\omega)=0,\ b(\omega)>0;\\ -\dfrac{\pi}{2}\ \text{при}\ a(\omega)=0,\ b(\omega)<0.\end{cases}$$

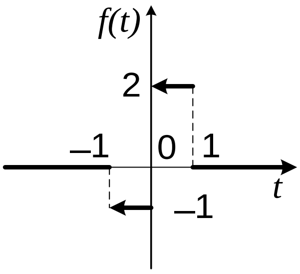
В заключение отметим, что для интеграла Фурье в комплексной форме $A(\omega)=2\left|F(\omega)\right|$, а $\varphi(\omega)=\arg\big(F(\omega)\big)$.

2. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ»

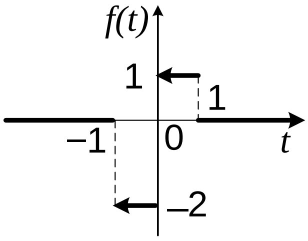
Задания 1.1 и 1.2. Функцию $f(t)$, заданную графически на интервале $(-\infty; +\infty)$, представьте интегралом Фурье в действительной форме, предварительно обосновав возможность этого представления.

1.1

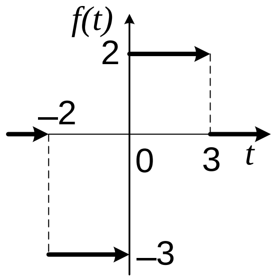
Вариант 1



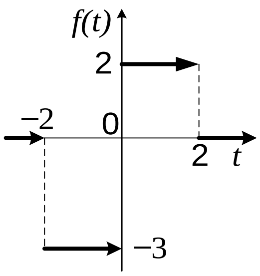
Вариант 2



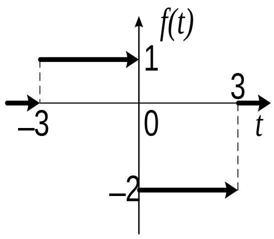
Вариант 3



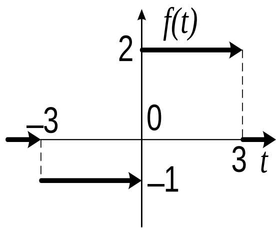
Вариант 4



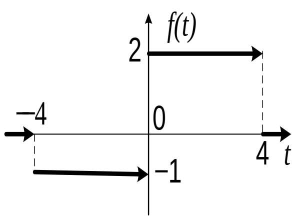
Вариант 5



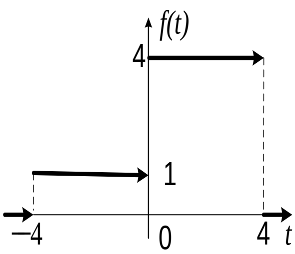
Вариант 6



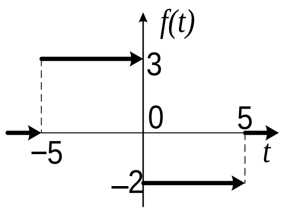
Вариант 7



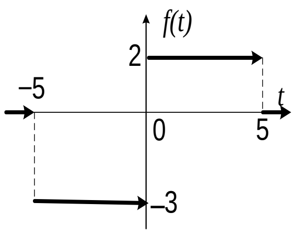
Вариант 8



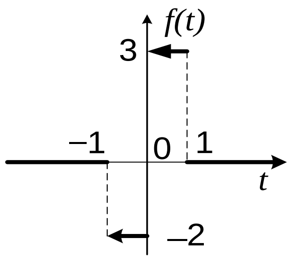
Вариант 9



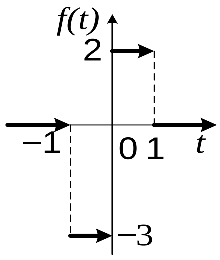
Вариант 10



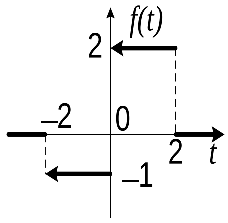
Вариант 11



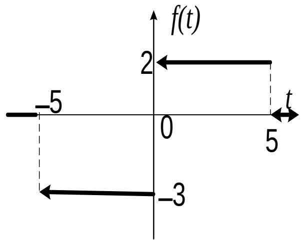
Вариант 12



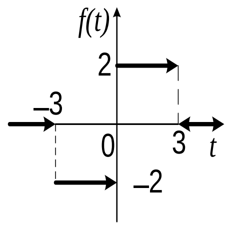
Вариант 13



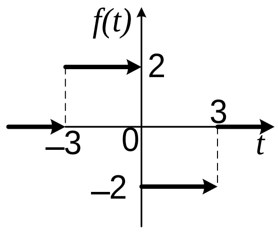
Вариант 14



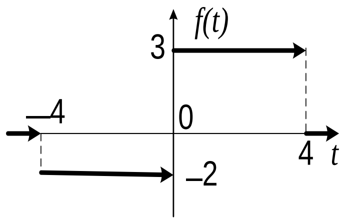
Вариант 15



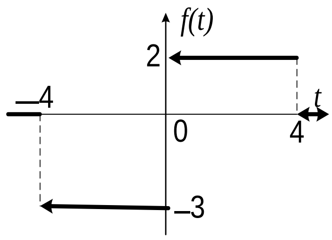
Вариант 16



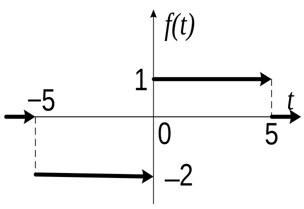
Вариант 17



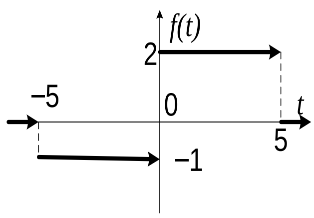
Вариант 18



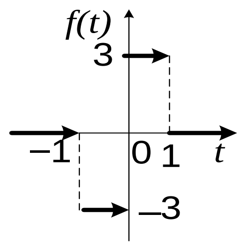
Вариант 19



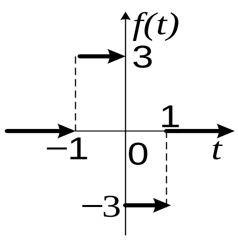
Вариант 20



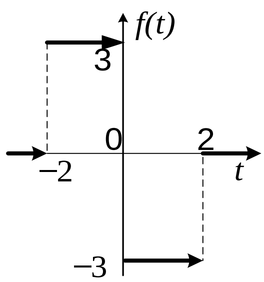
Вариант 21



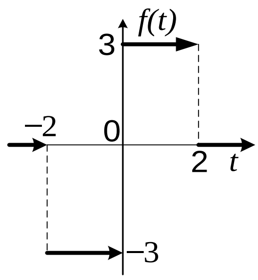
Вариант 22



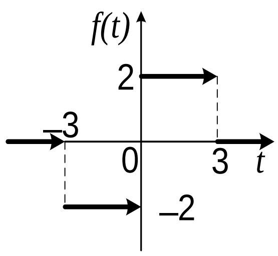
Вариант 23



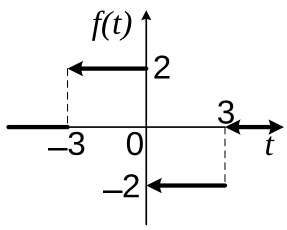
Вариант 24



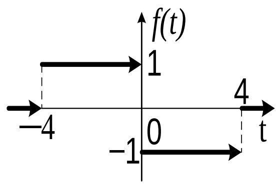
Вариант 25



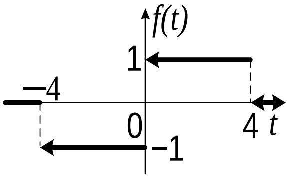
Вариант 26



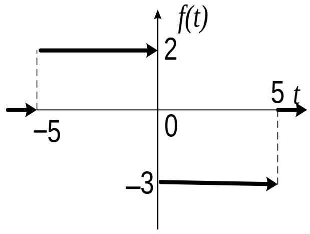
Вариант 27



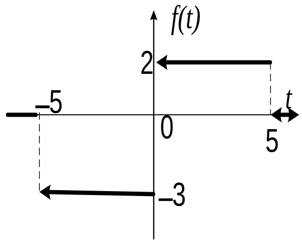
Вариант 28



Вариант 29

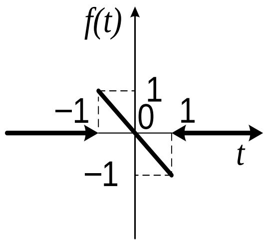


Вариант 30

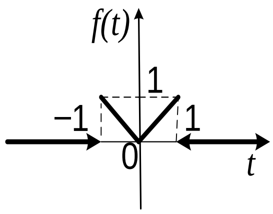


1.2.

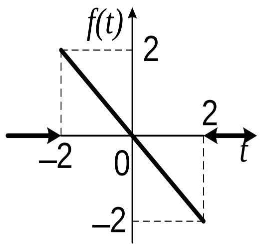
Вариант 1



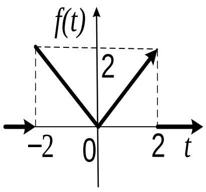
Вариант 2



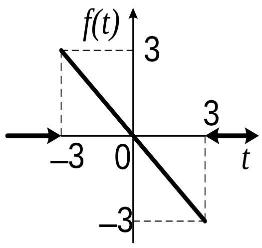
Вариант 3



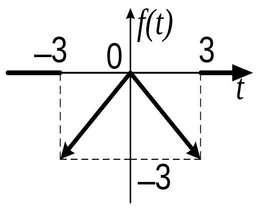
Вариант 4



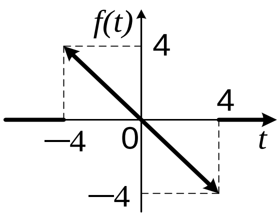
Вариант 5



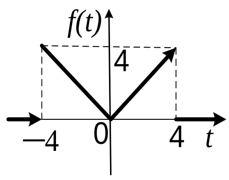
Вариант 6



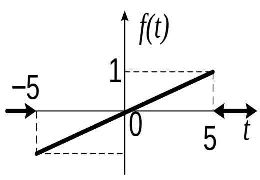
Вариант 7



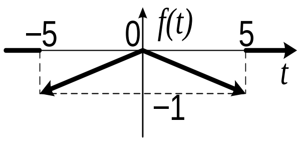
Вариант 8



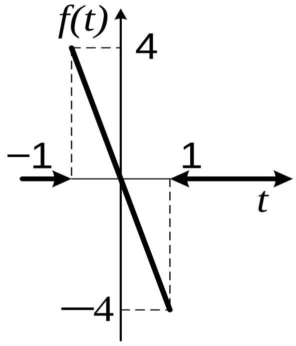
Вариант 9



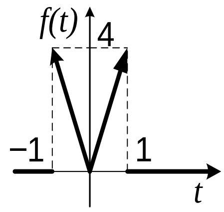
Вариант 10



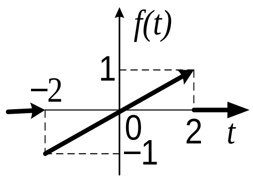
Вариант 11



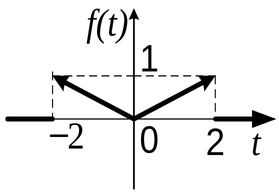
Вариант 12



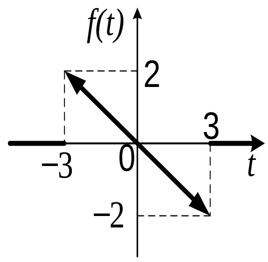
Вариант 13



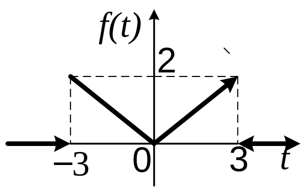
Вариант 14



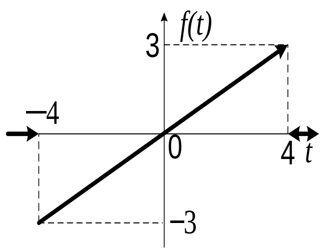
Вариант 15



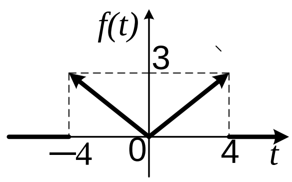
Вариант 16



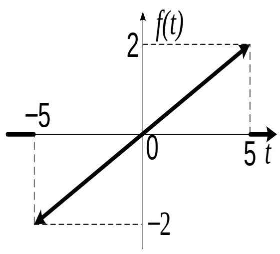
Вариант 17



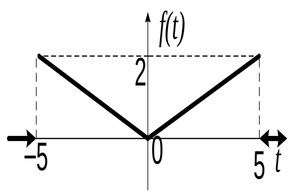
Вариант 18



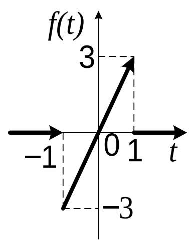
Вариант 19



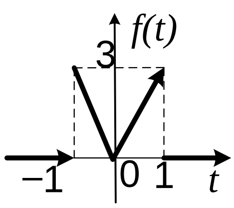
Вариант 20



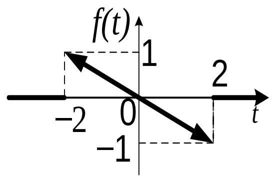
Вариант 21



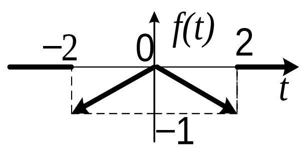
Вариант 22



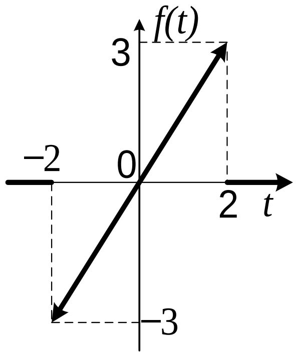
Вариант 23



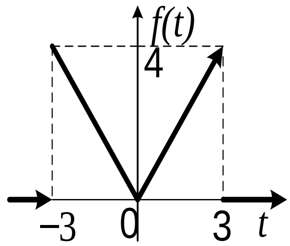
Вариант 24



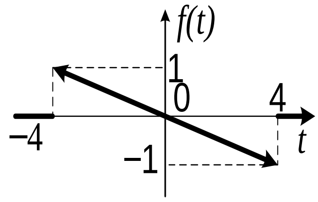
Вариант 25



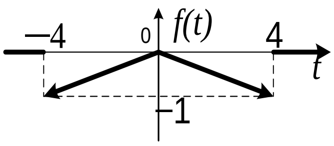
Вариант 26



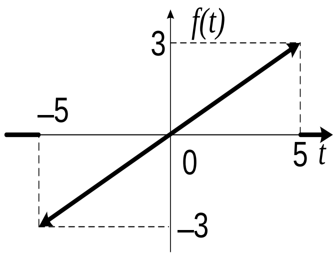
Вариант 27



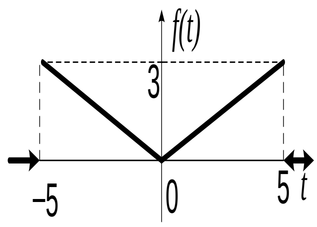
Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30



З а д а н и я 2.1 и 2.2. Составьте синус- и косинус-преобразования Фурье для функции $f(t)$, заданной на интервале $\left[0; +\infty\right)$.

2.1.1. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$

2.2.1. $f(t)=\begin{cases}t+5, & 0\le t\le 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$

2.1.2. $f(t)=\begin{cases}2, & 0\le t\le 2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$

2.2.2. $f(t)=\begin{cases}2t+4, & 0\le t\le 2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$

2.1.3. $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t\le 3;\\ 0, & t>3.\end{cases}$

2.2.3. $f(t)=\begin{cases}3t+3, & 0\le t\le 3;\\ 0, & t>3.\end{cases}$

2.1.4. $f(t)=\begin{cases}4, & 0\le t\le 4;\\ 0, & t>4.\end{cases}$

2.2.4. $f(t)=\begin{cases}4t+2, & 0\le t\le 4;\\ 0, & t>4.\end{cases}$

2.1.5. $f(t)=\begin{cases}5, & 0\le t\le 5;\\ 0, & t>5.\end{cases}$

2.2.5. $f(t)=\begin{cases}5t+1, & 0\le t\le 5;\\ 0, & t>5.\end{cases}$

2.1.6. $f(t)=\begin{cases}6, & 0\le t\le 6;\\ 0, & t>6.\end{cases}$

2.2.6. $f(t)=\begin{cases}6t+5, & 0\le t\le 6;\\ 0, & t>6.\end{cases}$

2.1.7. $f(t)=\begin{cases}7, & 0\le t\le 7;\\ 0, & t>7.\end{cases}$

2.2.7. $f(t)=\begin{cases}7t+4, & 0\le t\le 7;\\ 0, & t>7.\end{cases}$

2.1.8. $f(t)=\begin{cases}8, & 0\le t\le 8;\\ 0, & t>8.\end{cases}$

2.2.8. $f(t)=\begin{cases}8t+3, & 0\le t\le 8;\\ 0, & t>8.\end{cases}$

2.1.9. $f(t)=\begin{cases}9, & 0\le t\le 9;\\ 0, & t>9.\end{cases}$

2.1.10. $f(t)=\begin{cases}10, & 0\le t\le 10;\\ 0, & t>10.\end{cases}$

2.1.11. $f(t)=\begin{cases}10, & 0\le t\le 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$

2.1.12. $f(t)=\begin{cases}9, & 0\le t\le 2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$

2.1.13. $f(t)=\begin{cases}8, & 0\le t\le 3;\\ 0, & t>3.\end{cases}$

2.1.14. $f(t)=\begin{cases}7, & 0\le t\le 4;\\ 0, & t>4.\end{cases}$

2.1.15. $f(t)=\begin{cases}6, & 0\le t\le 5;\\ 0, & t>5.\end{cases}$

2.1.16. $f(t)=\begin{cases}5, & 0\le t\le 6;\\ 0, & t>6.\end{cases}$

2.1.17. $f(t)=\begin{cases}4, & 0\le t\le 7;\\ 0, & t>7.\end{cases}$

2.1.18. $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t\le 8;\\ 0, & t>8.\end{cases}$

2.1.19. $f(t)=\begin{cases}2, & 0\le t\le 9;\\ 0, & t>9.\end{cases}$

2.1.20. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 10;\\ 0, & t>10.\end{cases}$

2.1.21. $f(t)=\begin{cases}5, & 0\le t\le 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$

2.1.22. $f(t)=\begin{cases}10, & 0\le t\le 2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$

2.1.23. $f(t)=\begin{cases}4, & 0\le t\le 3;\\ 0, & t>3.\end{cases}$

2.1.24. $f(t)=\begin{cases}9, & 0\le t\le 4;\\ 0, & t>4.\end{cases}$

2.1.25. $f(t)=\begin{cases}3, & 0\le t\le 5;\\ 0, & t>5.\end{cases}$

2.1.26. $f(t)=\begin{cases}8, & 0\le t\le 6;\\ 0, & t>6.\end{cases}$

2.1.27. $f(t)=\begin{cases}2, & 0\le t\le 7;\\ 0, & t>7.\end{cases}$

2.2.9. $f(t)=\begin{cases}9t+4, & 0\le t\le 9;\\ 0, & t>9.\end{cases}$

2.2.10. $f(t)=\begin{cases}10t+5, & 0\le t\le 10;\\ 0, & t>10.\end{cases}$

2.2.11. $f(t)=\begin{cases}10t+1, & 0\le t\le 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$

2.2.12. $f(t)=\begin{cases}9t+2, & 0\le t\le 2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$

2.2.13. $f(t)=\begin{cases}8t+3, & 0\le t\le 3;\\ 0, & t>3.\end{cases}$

2.2.14. $f(t)=\begin{cases}7t+4, & 0\le t\le 4;\\ 0, & t>4.\end{cases}$

2.2.15. $f(t)=\begin{cases}6t+5, & 0\le t\le 5;\\ 0, & t>5.\end{cases}$

2.2.16. $f(t)=\begin{cases}5t+6, & 0\le t\le 6;\\ 0, & t>6.\end{cases}$

2.2.17. $f(t)=\begin{cases}4t+7, & 0\le t\le 7;\\ 0, & t>7.\end{cases}$

2.2.18. $f(t)=\begin{cases}3t+8, & 0\le t\le 8;\\ 0, & t>8.\end{cases}$

2.2.19. $f(t)=\begin{cases}2t+9, & 0\le t\le 9;\\ 0, & t>9.\end{cases}$

2.2.20. $f(t)=\begin{cases}t+10, & 0\le t\le 10;\\ 0, & t>10.\end{cases}$

2.2.21. $f(t)=\begin{cases}t+5, & 0\le t\le 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$

2.2.22. $f(t)=\begin{cases}2t+10, & 0\le t\le 2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$

2.2.23. $f(t)=\begin{cases}3t+4, & 0\le t\le 3;\\ 0, & t>3.\end{cases}$

2.2.24. $f(t)=\begin{cases}4t+9, & 0\le t\le 4;\\ 0, & t>4.\end{cases}$

2.2.25. $f(t)=\begin{cases}5t+3, & 0\le t\le 5;\\ 0, & t>5.\end{cases}$

2.2.26. $f(t)=\begin{cases}6t+8, & 0\le t\le 6;\\ 0, & t>6.\end{cases}$

2.2.27. $f(t)=\begin{cases}7t+2, & 0\le t\le 7;\\ 0, & t>7.\end{cases}$

2.1.28. $f(t)=\begin{cases}7, & 0\le t\le 8;\\ 0, & t>8.\end{cases}$

2.1.29. $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 9;\\ 0, & t>9.\end{cases}$

2.1.30. $f(t)=\begin{cases}6, & 0\le t\le 10;\\ 0, & t>10.\end{cases}$

2.2.28. $f(t)=\begin{cases}8t+7, & 0\le t\le 8;\\ 0, & t>8.\end{cases}$

2.2.29. $f(t)=\begin{cases}9t+1, & 0\le t\le 9;\\ 0, & t>9.\end{cases}$

2.2.30. $f(t)=\begin{cases}10t+6, & 0\le t\le 10;\\ 0, & t>10.\end{cases}$

Задание 3. Представьте функцию $f(t)$, заданную аналитически в промежутке $(-\infty;+\infty)$, интегралом Фурье в комплексной форме.

3.1. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-t}, & 0\le t\le 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$

3.2. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\frac{t}{2}}, & 0\le t\le 2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$

3.3. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\frac{t}{3}}, & 0\le t\le 3;\\ 0, & t>3.\end{cases}$

3.4. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\frac{t}{4}}, & 0\le t\le 4;\\ 0, & t>4.\end{cases}$

3.5. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\frac{t}{5}}, & 0\le t\le 5;\\ 0, & t>5.\end{cases}$

3.6. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\frac{t}{6}}, & 0\le t\le 6;\\ 0, & t>6.\end{cases}$

3.7. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\frac{t}{7}}, & 0\le t\le 7;\\ 0, & t>7.\end{cases}$

3.8. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\frac{t}{8}}, & 0\le t\le 8;\\ 0, & t>8.\end{cases}$

3.9. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\frac{t}{9}}, & 0\le t\le 9;\\ 0, & t>9.\end{cases}$

3.10. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-\frac{t}{10}}, & 0\le t\le 10;\\ 0, & t>10.\end{cases}$

3.11. $f(t)=\begin{cases}0, & t<-1;\\ e^{t}, & -1\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$

3.12. $f(t)=\begin{cases}0, & t<-2;\\ e^{\frac{t}{2}}, & -2\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$

3.13. $f(t)=\begin{cases}0, & t<-3;\\ e^{\frac{t}{3}}, & -3\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$

3.14. $f(t)=\begin{cases}0, & t<-4;\\ e^{\frac{t}{4}}, & -4\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$

3.15. $f(t)=\begin{cases}0, & t<-5;\\ e^{\frac{t}{5}}, & -5\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$

3.16.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-6;\\ e^{\frac{t}{6}}, & -6\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

3.17.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-7;\\ e^{\frac{t}{7}}, & -7\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

3.18.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-8;\\ e^{\frac{t}{8}}, & -8\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

3.19.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-9;\\ e^{\frac{t}{9}}, & -9\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

3.20.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-10;\\ e^{\frac{t}{10}}, & -10\le t\le 0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

3.21.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-1;\\ e^{-t}, & -1\le t\le 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

3.22.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-2;\\ e^{-\frac{t}{2}}, & -2\le t\le 2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$$

3.23.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-3;\\ e^{-\frac{t}{3}}, & -3\le t\le 3;\\ 0, & t>3.\end{cases}$$

3.24.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-4;\\ e^{-\frac{t}{4}}, & -4\le t\le 4;\\ 0, & t>4.\end{cases}$$

3.25.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-5;\\ e^{-\frac{t}{5}}, & -5\le t\le 5;\\ 0, & t>5.\end{cases}$$

3.26.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-1;\\ e^{t}, & -1\le t\le 1;\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

3.27.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-2;\\ e^{\frac{t}{2}}, & -2\le t\le 2;\\ 0, & t>2.\end{cases}$$

3.28.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-3;\\ e^{\frac{t}{3}}, & -3\le t\le 3;\\ 0, & t>3.\end{cases}$$

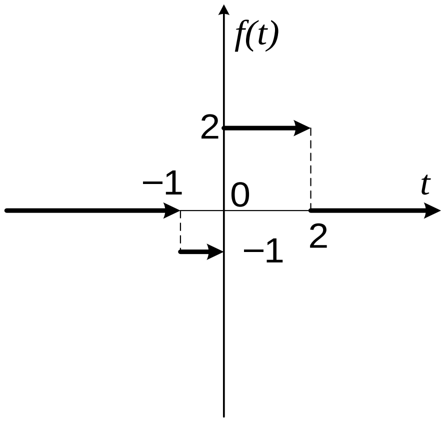
3.29.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-4;\\ e^{\frac{t}{4}}, & -4\le t\le 4;\\ 0, & t>4.\end{cases}$$

3.30.
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-5;\\ e^{\frac{t}{5}}, & -5\le t\le 5;\\ 0, & t>5.\end{cases}$$

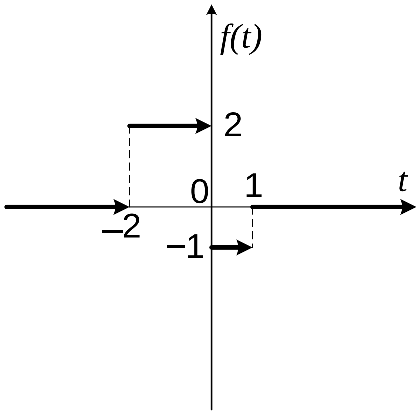
З а д а н и я 4.1 и 4.2. Найдите амплитудный и фазовый непрерывный спектры сигнала, определяемого функцией $f(t)$, заданной графически на интервале $(-\infty; +\infty)$.

4.1.

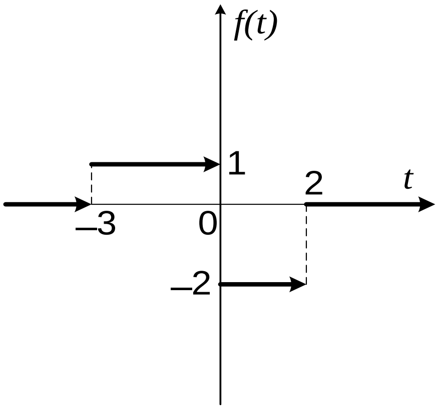
Вариант 1



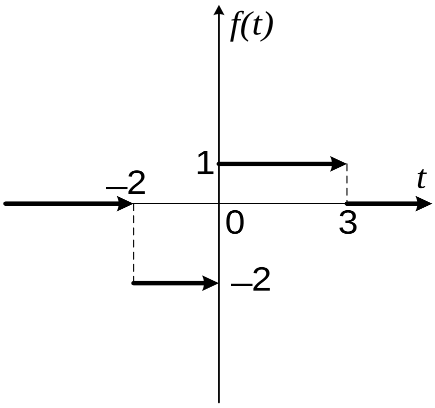
Вариант 2



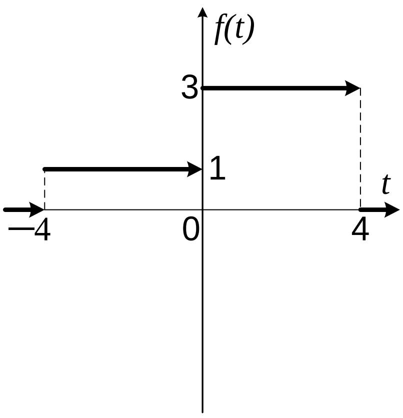
Вариант 3



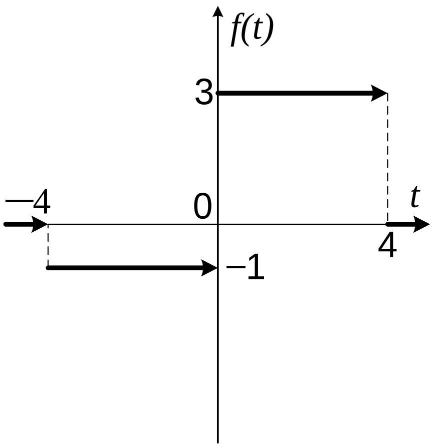
Вариант 4



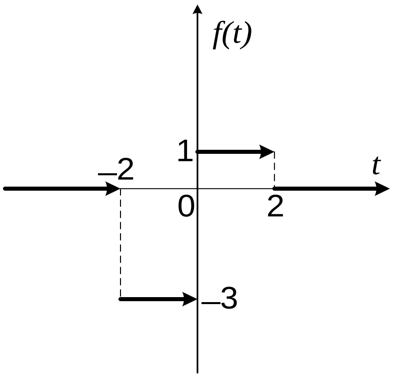
Вариант 5



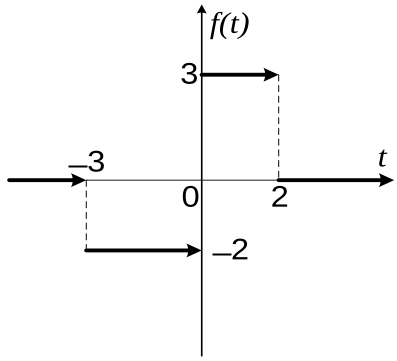
Вариант 6



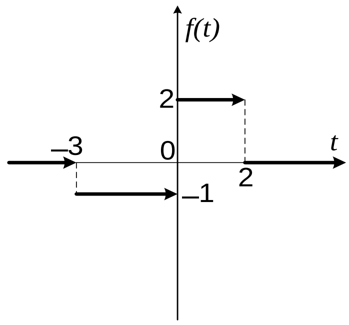
Вариант 7



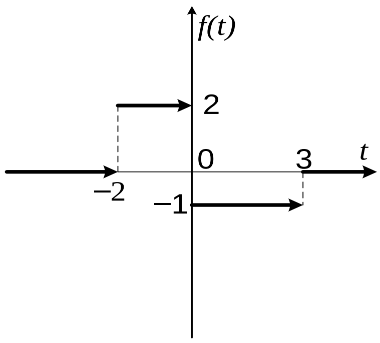
Вариант 8



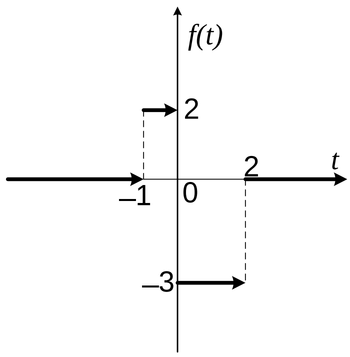
Вариант 9



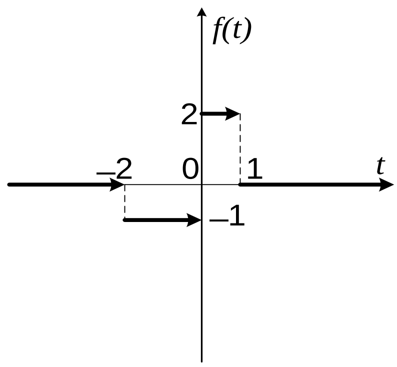
Вариант 10



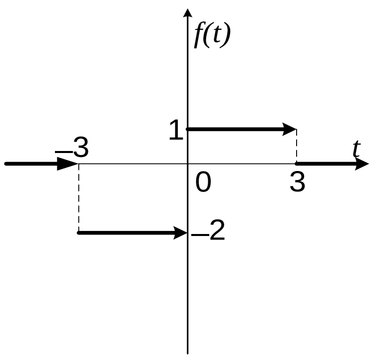
Вариант 11



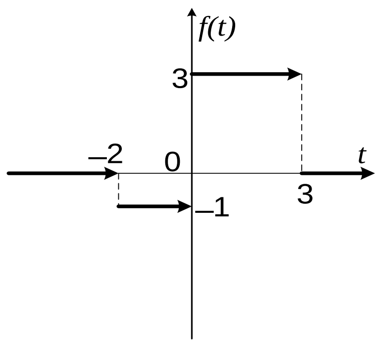
Вариант 12



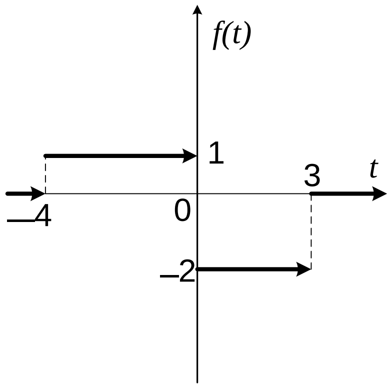
Вариант 13



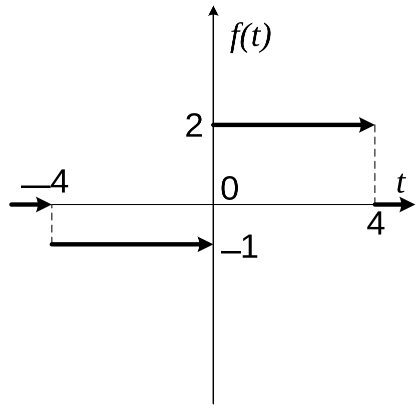
Вариант 14



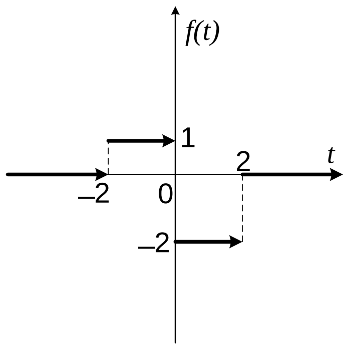
Вариант 15



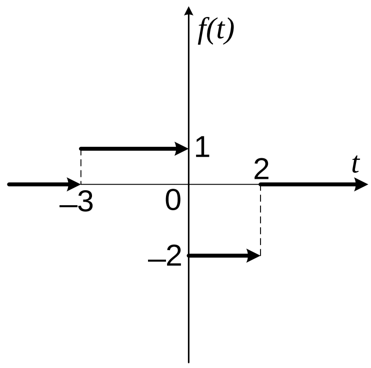
Вариант 16



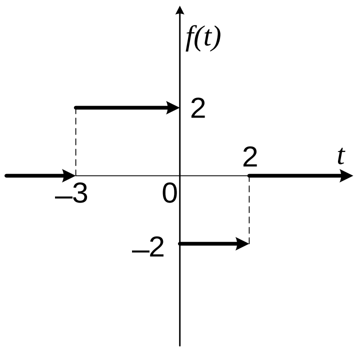
Вариант 17



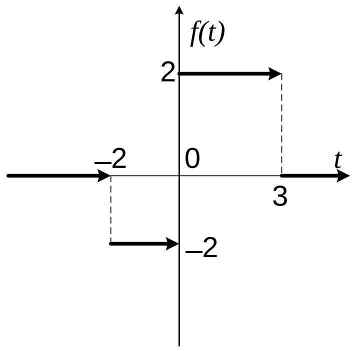
Вариант 18



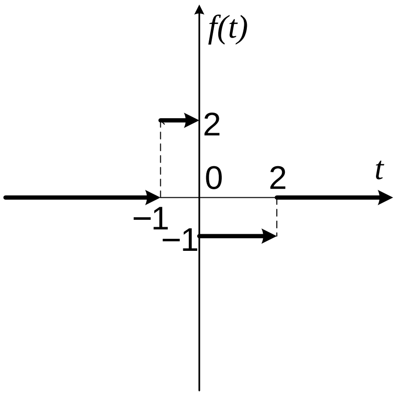
Вариант 19



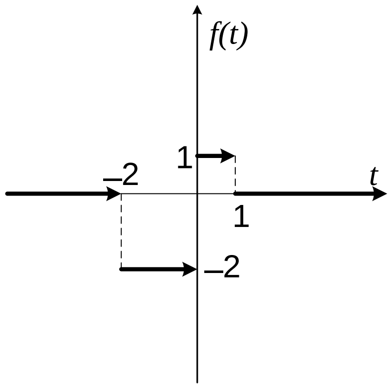
Вариант 20



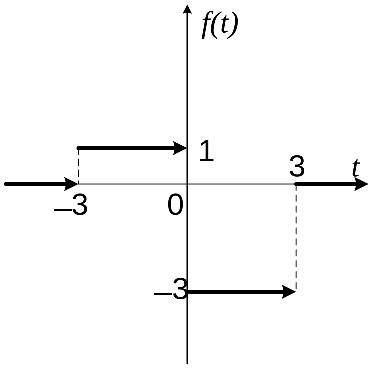
Вариант 21



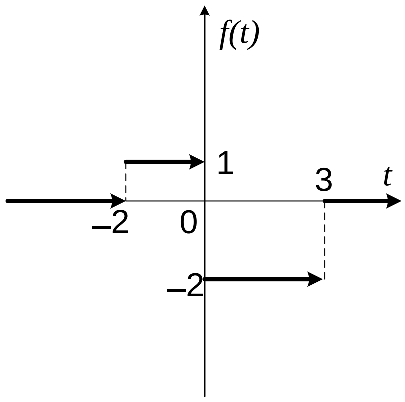
Вариант 22



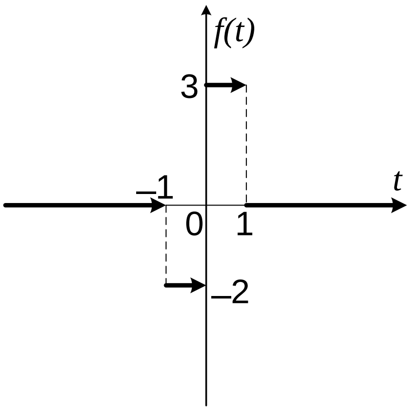
Вариант 23



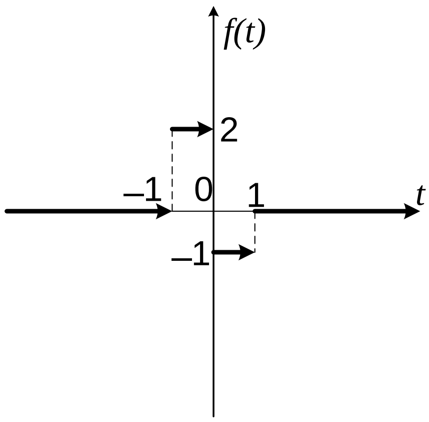
Вариант 24



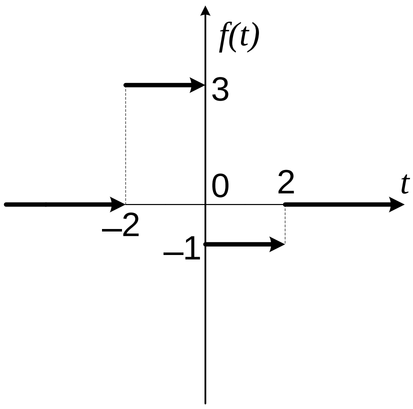
Вариант 25



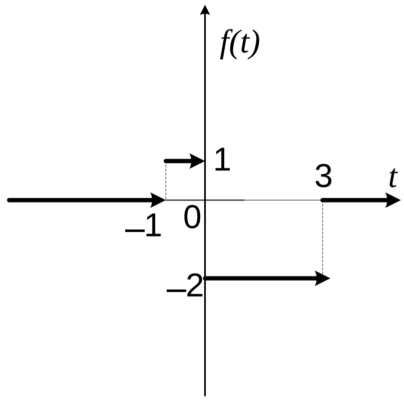
Вариант 26



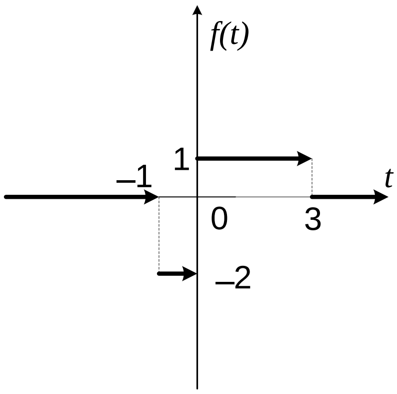
Вариант 27



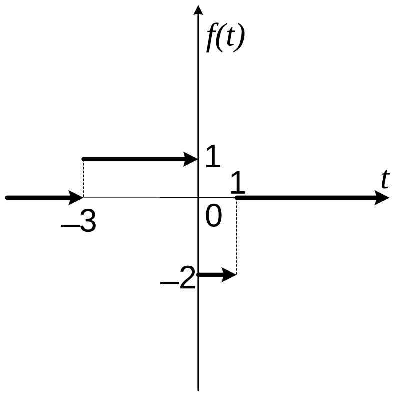
Вариант 28



Вариант 29

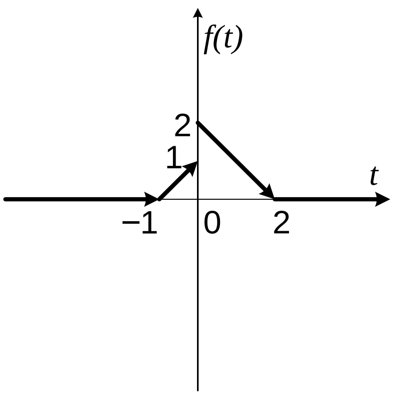


Вариант 30

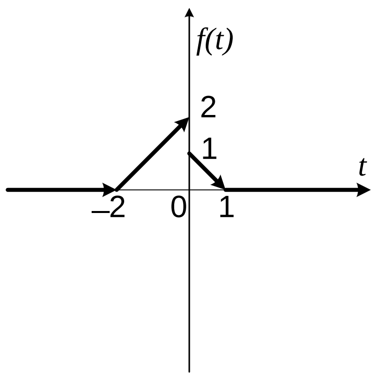


4.2.

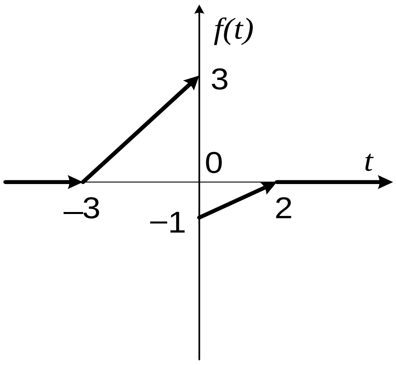
Вариант 1



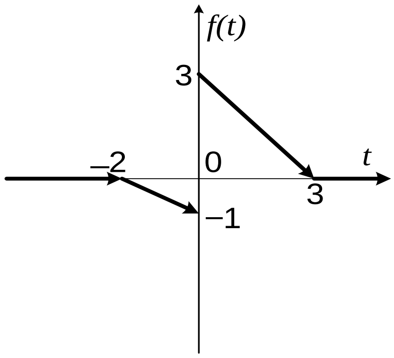
Вариант 2



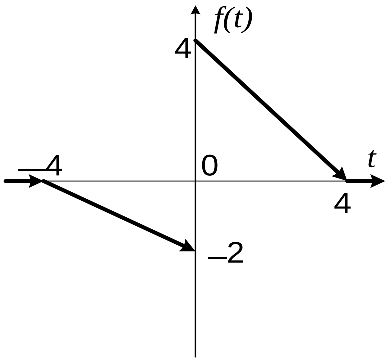
Вариант 3



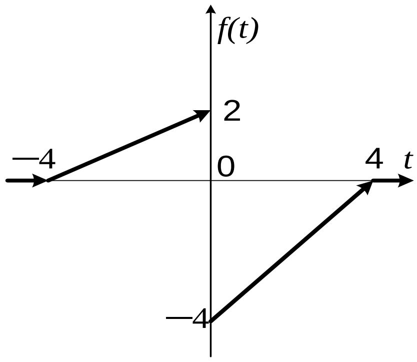
Вариант 4



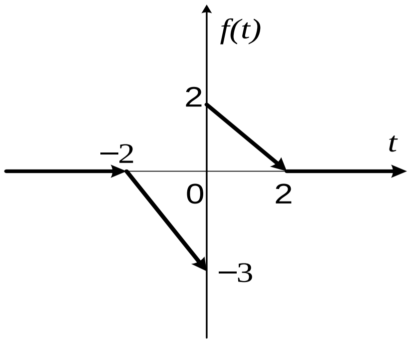
Вариант 5



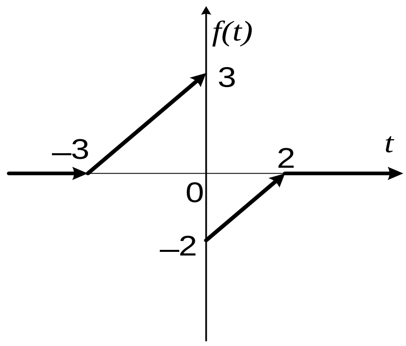
Вариант 6



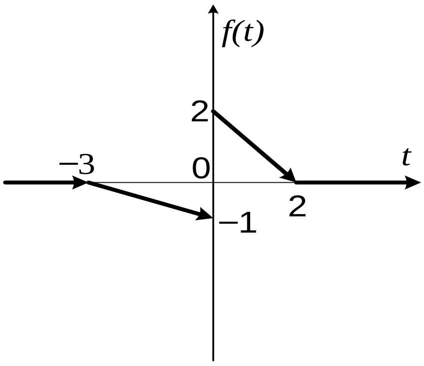
Вариант 7



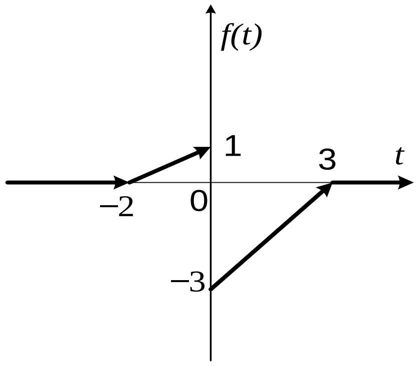
Вариант 8



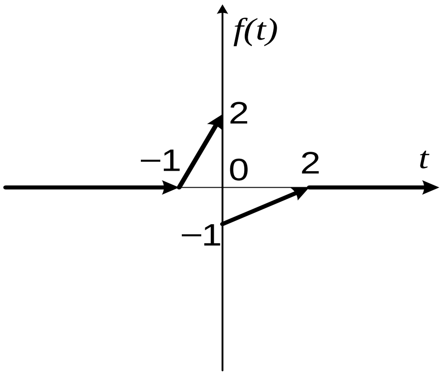
Вариант 9



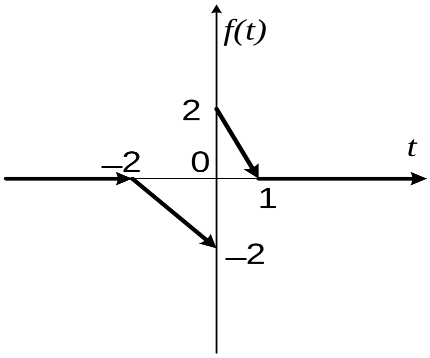
Вариант 10



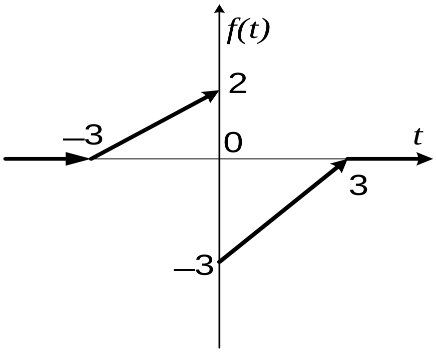
Вариант 11



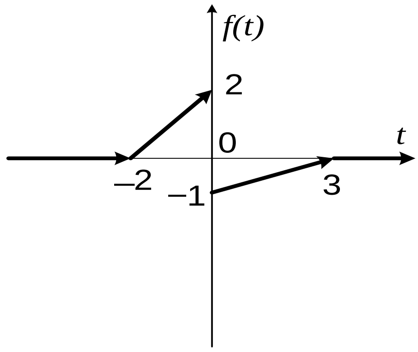
Вариант 12



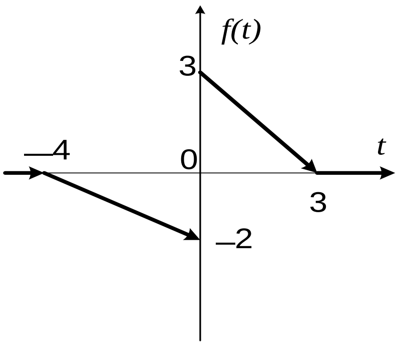
Вариант 13



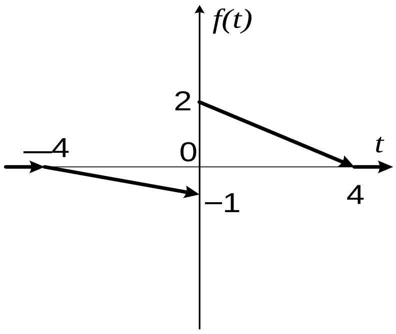
Вариант 14



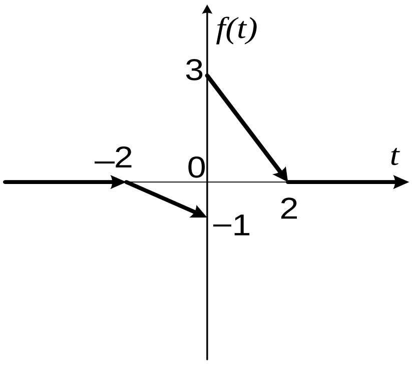
Вариант 15



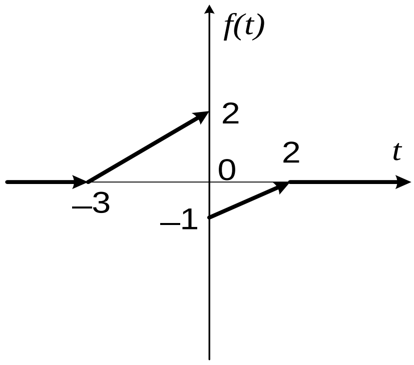
Вариант 16



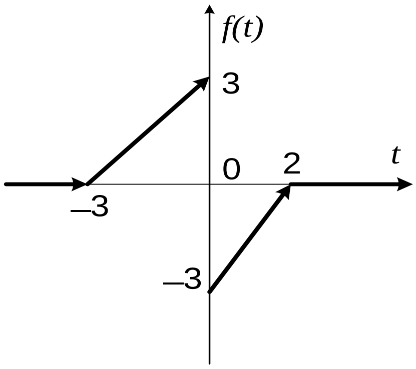
Вариант 17



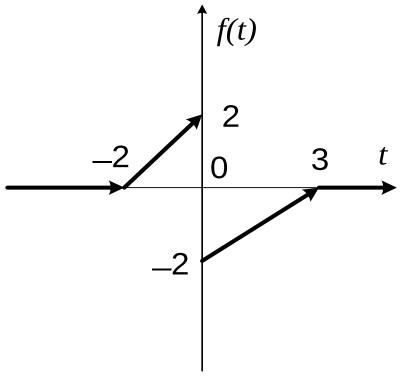
Вариант 18



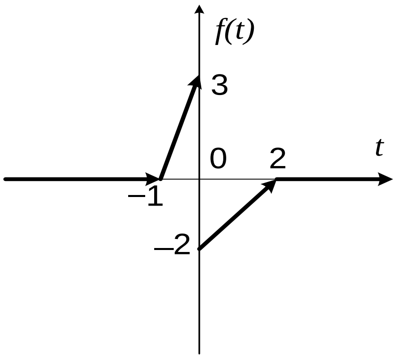
Вариант 19



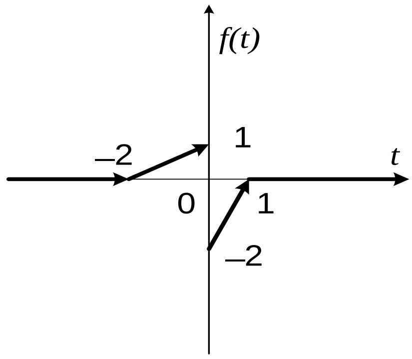
Вариант 20



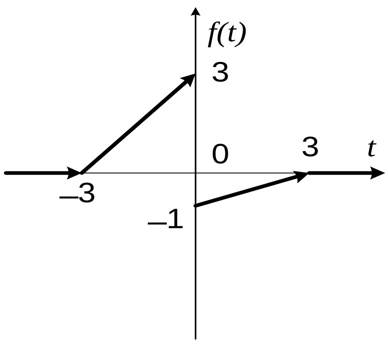
Вариант 21



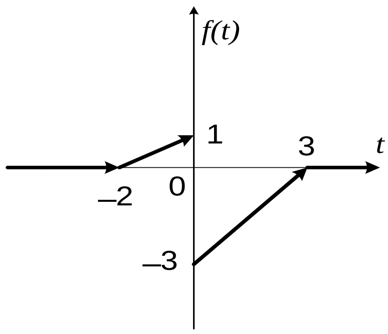
Вариант 22



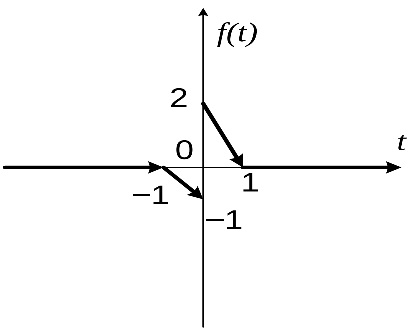
Вариант 23



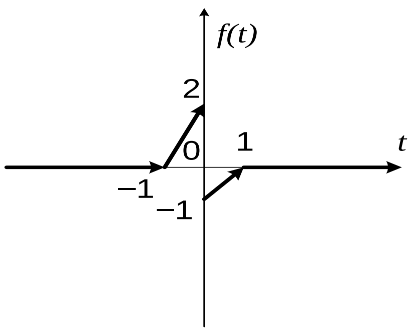
Вариант 24



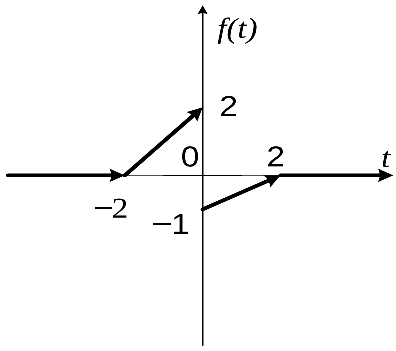
Вариант 25



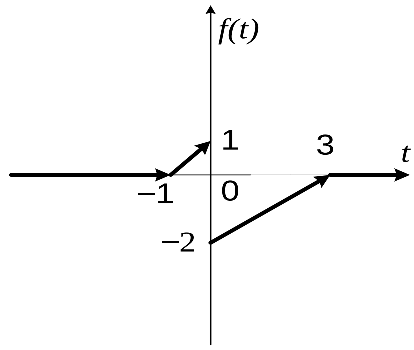
Вариант 26



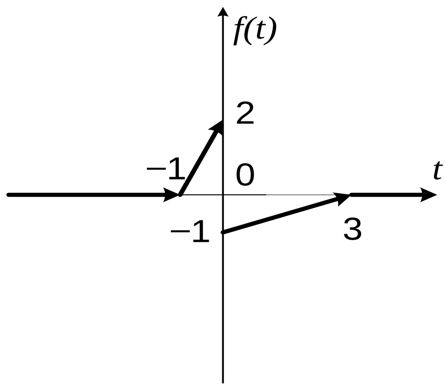
Вариант 27



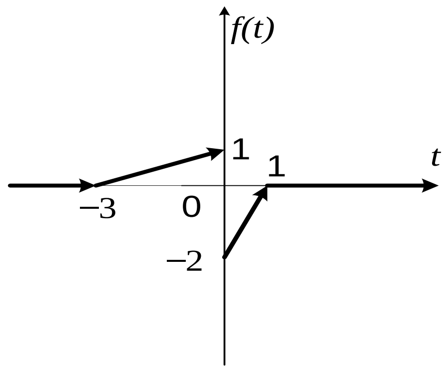
Вариант 28



Вариант 29



Вариант 30



3. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

З а д а н и е 1.1. Функцию $f(t)$, заданную графически (рис. 1) на интервале $(-\infty; +\infty)$, представьте интегралом Фурье в действительной форме, предварительно обосновав возможность этого представления.

Р е ш е н и е. Запишем аналитическое выражение для функции $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -3; \\ -1, & -3 \le t < 0; \\ 3, & 0 \le t < 4; \\ 0, & t \ge 4. \end{cases}$$

Проверим условия теоремы Дирихле для функции $f(t)$.

Кусочная монотонность и ограниченность функции $f(t)$ очевидны.

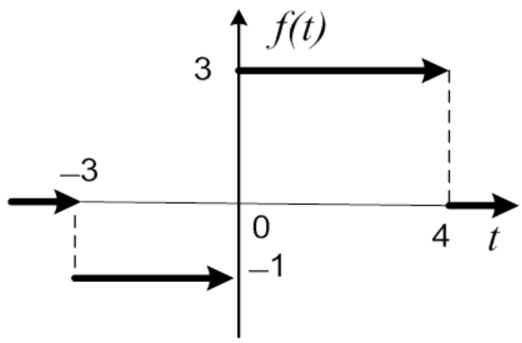


Рис. 1. График функции $f(t)$ к заданию 1.1

Проверим абсолютную интегрируемость: $\int |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{-3} 0\,dt + \int_{-3}^{0} 1dt + \int_{0}^{4} 3dt +$

$$+\int_{4}^{+\infty} 0\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} = 0 + t\Big|_{-3}^{0} + 3t\Big|_{0}^{4} + 0 = 15 < +\infty.$$

Функция абсолютно интегрируема, следовательно, ее можно представить интегралом Фурье, который совпадает с функцией $f(t)$ за исключением, может быть, точек разрыва: $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\,\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega\left(z-t\right)dz.$

Обозначим $F\left(\omega;t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\cos\omega\left(z-t\right)dt.$ Тогда $F\left(\omega;t\right) =$

$$= \int_{-\infty}^{-3} 0\cdot\cos\omega\left(z-t\right)dz + \int_{-3}^{0}\left(-1\right)\cdot\cos\omega\left(z-t\right)dz + \int_{0}^{4} 3\cdot\cos\omega\left(z-t\right)dz + \int_{4}^{+\infty} 0\cdot\cos\omega\left(z-t\right)dz =$$

$$= 0 - \int_{-3}^{0}\cos\omega\left(z-t\right)dz + 3\int_{0}^{4}\cos\omega\left(z-t\right)dz + 0 = -\frac{1}{\omega}\sin\omega\left(z-t\right)\Big|_{-3}^{0} + \frac{3}{\omega}\sin\omega\left(z-t\right)\Big|_{0}^{4} =$$

$$= \frac{1}{\omega}\sin\omega t - \frac{1}{\omega}\sin\omega\left(3+t\right) + \frac{3}{\omega}\sin\omega\left(3+t\right) + \frac{3}{\omega}\sin\omega t =$$

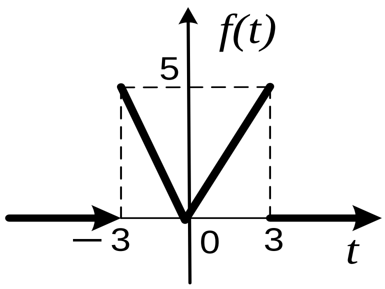
$$= \frac{4}{\omega}\sin\omega t - \frac{1}{\omega}\sin\omega\left(3+t\right) + \frac{3}{\omega}\sin\omega\left(3+t\right).$$

При вычислении использовались свойства функции $\sin t$. Запишем окончательный результат:

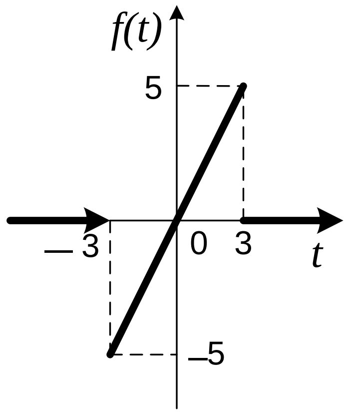
$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{4}{\omega}\sin\omega t - \frac{1}{\omega}\sin\omega\left(3+t\right) + \frac{3}{\omega}\sin\omega\left(4-t\right)\right)d\,\omega.$$

Заметим, что в правой части равенства находится так называемый «неберущийся» интеграл.

З а д а н и е 1.2. Функцию $f(t)$, заданную графически (рис. 2, *а*, *б*) на интервале $\left(-\infty; +\infty\right)$, представьте интегралом Фурье в действительной форме, предварительно обосновав возможность этого представления.



а



б

Рис. 2. График функции $f(t)$ к заданию 1.2

Р е ш е н и е. Каждая из заданных функций имеет свою особенность: функция на рис. 2, *а* является четной, а на рис. 2, *б* нечетной. Обе эти функции удовлетворяют условиям Дирихле (проверьте), поэтому ее можно представить интегралом Фурье, который совпадает с функцией $f(t)$ за исключением, может быть, точек разрыва. В таких случаях интеграл Фурье удобнее всего записать одним из следующих способов:

$$f(t)=\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega t\,d\,\omega,\ \text{где}\ a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(z)\cos\omega z\,dz,$$ если $f(t)$ – четная функция;

$$f(t)=\int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega t\,d\,\omega,\ \text{где}\ b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(z)\sin\omega z\,dz,$$ если $f(t)$ – нечетная функция.

Здесь использованы формулы для вычисления коэффициентов $(ИФДФ-II)$ с применением свойств интегралов на симметричном интервале от четной и нечетной функций.

Представим интегралом Фурье функцию, приведенную на рис. 2, *а*. Запишем аналитическое выражение для функции $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<-3;\\ -\dfrac{5t}{3}, & -3\le t<0;\\ \dfrac{5t}{3}, & 0\le t<3;\\ 0, & t\ge 4. \end{cases}$$

Тогда $a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(z)\cos\omega z\,dz=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{5}{3}\int\limits_0^3 z\cos\omega z\,dz=\begin{bmatrix} u=z;\ dv=\cos\omega z\,dz \\ du=dz;\ v=\frac{1}{\omega}\sin\omega z \end{bmatrix}=$

$$=\frac{10}{3\pi}\cdot\frac{z}{\omega}\sin\omega z\Big|_0^3-\frac{10}{3\pi\omega}\int\limits_0^3\sin\omega z\,dz=\frac{10}{\pi\omega}\sin3\omega+\frac{10}{3\pi\omega^2}\cos\omega z\Big|_0^3=\frac{10}{\pi\omega}\sin3\omega+$$

$$+\frac{10(\cos3\omega-1)}{3\pi\omega^2}.$$

Подставим найденное выражение для $a(\omega)$ и запишем окончательный результат: $f(t)=\frac{10}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin3\omega}{\omega}+\frac{\cos3\omega-1}{3\omega^2}\right)\cos\omega t\,d\omega.$

Представим теперь интегралом Фурье функцию, приведенную на рис. 2, *б*. Запишем аналитическое выражение для функции $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<-3; \\ \frac{5t}{3}, & -3\le t<3; \\ 0, & t\ge3. \end{cases}$$

Тогда

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(z)\sin\omega z\,dz=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{5}{3}\int\limits_0^3 z\sin\omega z\,dz=\begin{bmatrix} u=z;\ dv=\sin\omega z\,dz \\ du=dz;\ v=-\frac{1}{\omega}\cos\omega z \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{10}{3\pi}\cdot\frac{z}{\omega}\cos\omega z\Big|_0^3+\frac{10}{3\pi\omega}\int\limits_0^3\cos\omega z\,dz=-\frac{10}{\pi\omega}\cos3\omega+\frac{10}{3\pi\omega^2}\sin\omega z\Big|_0^3=-\frac{10}{\pi\omega}\cos3\omega+$$

$$+\frac{10\sin3\omega}{3\pi\omega^2}.$$

Подставим найденное выражение для $b(\omega)$ и запишем окончательный результат: $f(t)=\frac{10}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin3\omega}{3\omega^2}-\frac{\cos3\omega}{\omega}\right)\sin\omega t\,d\omega.$

З а д а н и я 2.1 и 2.2. Составьте синус- и косинус-преобразования Фурье для функции $f(t)$, заданной на интервале $[0;+\infty)$.

2.1. $f(t)=\begin{cases} 4, & 0\le t\le5; \\ 0, & t>5. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Данная функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $[0; +\infty)$ (проверьте), поэтому для нее можно составить как синус-, так и косинус-преобразования Фурье и, записав для нее обратное синус- или косинус-преобразование Фурье, получить исходную функцию $f(t)$, продолженную на интервал $(-\infty; 0)$ нечетным или четным образом соответственно.

Составим вначале синус-преобразование Фурье:

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(z)\sin\omega z\,dz; \quad f(t) = \int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\,d\omega;$$

$$F_s(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(z)\sin\omega z\,dz = \frac{2}{\pi}\int_0^{5} 4\sin\omega z\,dz = -\frac{8}{\pi\omega}\cos\omega z\Big|_0^5 = \frac{8(1-\cos 5\omega)}{\pi\omega}.$$

Запишем исходную функцию через синус-преобразование Фурье:

$$f(t) = \int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\,d\omega = \frac{8}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 5\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega.$$

Теперь составим косинус-преобразование Фурье:

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos\omega z\,dz; \quad f(t) = \int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega;$$

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(z)\cos\omega z\,dz = \frac{2}{\pi}\int_0^{5} 4\cos\omega z\,dz = \frac{8}{\pi\omega}\sin\omega z\Big|_0^5 = \frac{8\sin 5\omega}{\pi\omega}.$$

Запишем исходную функцию через синус-преобразование Фурье:

$$f(t) = \int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega = \frac{8}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 5\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega.$$

2.2. $f(t) = \begin{cases} 2t+1, & 0 \le t \le 4; \\ 0, & t > 4. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Данная функция $f(t)$ также удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $[0; +\infty)$ (проверьте), поэтому, как и для функции из задания 2.1, для нее можно составить как синус-, так и косинус-преобразование Фурье.

Составим синус-преобразование Фурье:

$$F_s(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(z)\sin\omega z\,dz=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{4}(2z+1)\sin\omega z\,dz=\begin{bmatrix} u=2z+1;\ dv=\sin\omega z\,dz; \\ du=2\,dz;\ v=-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega z\,dz \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{2}{\pi\omega}(2z+1)\cos\omega z\Big|_0^4+\frac{4}{\pi\omega}\int\limits_0^4\cos\,\omega z\ dz=-\frac{18}{\pi\omega}\cos\,4\omega+\frac{2}{\pi\omega}+\frac{4}{\pi\omega^2}\sin\,\omega z\Big|_0^4=$$

$=\dfrac{2}{\pi\omega}-\dfrac{18}{\pi\omega}\cos 4\omega+\dfrac{4}{\pi\omega^2}\sin 4\omega.$ Запишем исходную функцию через синус-преобразование Фурье:

$$f(t)=\int\limits_0^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{9}{\omega}\cos 4\omega+\frac{2}{\omega^2}\sin 4\omega\right)\sin\omega t\,d\omega.$$

Составим косинус-преобразование Фурье:

$$F_c(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(z)\cos\omega z\,dz=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{4}(2z+1)\cos\omega z\,dz=\begin{bmatrix} u=2z+1;\ dv=\cos\omega z\,dz; \\ du=2\,dz;\ v=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega z\,dz \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi\omega}\,(\,2z\ +1\,)\,\sin\omega z\Big|_0^4\ -\ \frac{4}{\pi\omega}\int\limits_0^4\sin\omega z\,dz\ =\ \frac{18}{\pi\omega}\sin 4\omega\ \ +\frac{4}{\pi\omega^2}\ \cos\omega z\Big|_0^4\ =$$

$=\dfrac{18}{\pi\omega}\sin 4\omega+\dfrac{4}{\pi\omega^2}(\cos 4\omega-1).$ Запишем исходную функцию через косинус-преобразование Фурье:

$$f(t)=\int\limits_0^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{9}{\pi\omega}\sin 4\omega+\frac{2}{\pi\omega^2}(\cos 4\omega-1)\right)\cos\omega t\,d\omega.$$

З а д а н и е 3. Представьте функцию $f(t)=\begin{cases}0, & t<-6;\\ e^{-\frac{t}{6}}, & -6\le t\le 6;\\ 0, & t>6,\end{cases}$ заданную аналитически в промежутке $(-\infty;+\infty)$, интегралом Фурье в комплексной форме.

Р е ш е н и е. Данная функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на интервале $(-\infty;+\infty)$ (проверьте), поэтому для нее можно составить как прямое преобразование Фурье: $F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt,$ так и обратное преобразование Фурье: $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega.$ Найдем сначала прямое преобразование Фурье: $F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int\limits_{-6}^{6} e^{-\frac{t}{6}}\,e^{-j\omega t}\,dt=\int\limits_{-6}^{6} e^{-\left(\frac{t}{6}+j\omega t\right)}dt\;=\int\limits_{-6}^{6} e^{-t\left(\frac{1}{6}+j\omega\right)}dt\;=$

$$=-\frac{1}{\frac{1}{6}+j\omega}e^{-t\left(\frac{1}{6}+j\omega\right)}\Bigg|_{-6}^{6}=-\frac{6}{1+6j\omega}\left(e^{-1-6j\omega}-e^{1+6j\omega}\right)=\frac{6\left(e^{1+6j\omega}-e^{-1-6j\omega}\right)}{1+6j\omega}.$$

Записав теперь обратное преобразование Фурье, получим представление функции $f(t)$ интегралом Фурье в комплексной форме:

$$f(t)=\frac{3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(e^{1+6j\omega}-e^{-1-6j\omega}\right)}{1+6j\omega}\,e^{j\omega t}\,d\omega.$$

З а д а н и я 4.1 и 4.2. Найдите амплитудный и фазовый непрерывный спектры сигнала, определяемого функцией $f(t)$, заданной графически (рис. 3, 4) на интервале $(-\infty;+\infty)$.

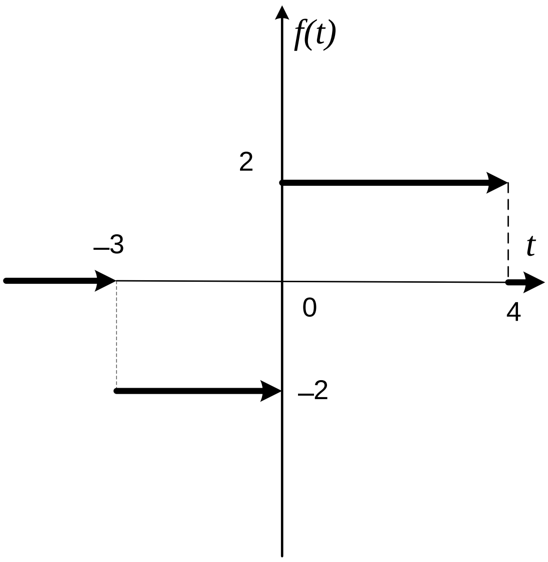


Рис. 3. График функции $f(t)$ к заданию 4.1

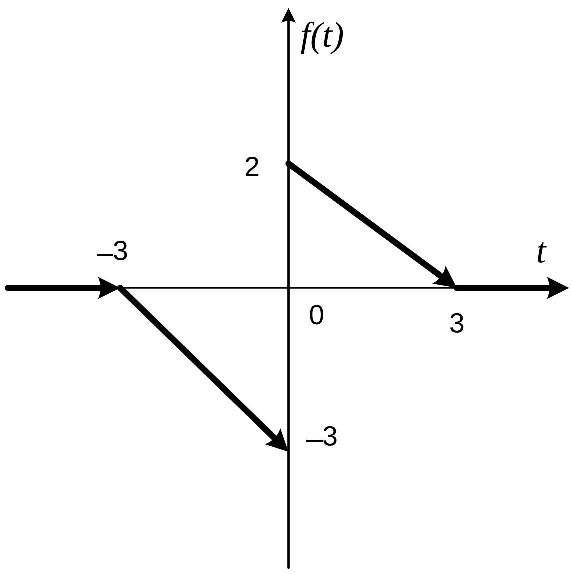


Рис. 4. График функции $f(t)$ к заданию 4.2

Р е ш е н и е. Обе функции – 4.1 и 4.2 – удовлетворяют условиям Дирихле (проверьте), потому обе функции, определяющие сигнал, можно представить интегралом Фурье. Интеграл Фурье можно также записать и в следующей форме: $f(t)=\int\limits_{0}^{+\infty}\left(a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t\right)d\omega,$ где $a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt;$

$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt.$

Тогда функция $A(\omega)=\sqrt{\left(a(\omega)\right)^2+\left(b(\omega)\right)^2}$ определяет амплитудный спектр сигнала, определяемого функцией $f(t)$, а функция $\varphi(\omega)=\begin{cases}\arccos\frac{a(\omega)}{A(\omega)}, & b(\omega)\ge 0;\\ -\arccos\frac{a(\omega)}{A(\omega)}, & b(\omega)<0\end{cases}$ определяет фазовый спектр этого сигнала.

4.1. Запишем аналитическое выражение функции $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-3;\\ -2, & -3\le t<0;\\ 2, & 0\le t<4;\\ 0, & t\ge 4.\end{cases}$$

Тогда $a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-3}^{0}(-2)\cos\omega t\,dt+\int\limits_{0}^{4}2\cos\omega t\,dt\right)=$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-2}{\omega}\sin\omega t\Big|_{-3}^{0}+\frac{2}{\omega}\sin\omega t\Big|_{0}^{4}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\sin 3\omega}{\omega}+\frac{2\sin 4\omega}{\omega}\right)=\frac{2}{\pi\omega}(\sin 4\omega-\sin 3\omega);$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-3}^{0}(-2)\sin\omega t\,dt+\int\limits_{0}^{4}2\sin\omega t\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{\omega}\cos\omega t\Big|_{-3}^{0}-\frac{2}{\omega}\cos\omega t\Big|_{0}^{4}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2(1-\cos 3\omega)}{\omega}-\frac{2(\cos 4\omega-1)}{\omega}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi\omega}(\cos 3\omega+\cos 4\omega-2).$$

Найдем теперь $A(\omega)=\sqrt{\left(a(\omega)\right)^2+\left(b(\omega)\right)^2}=$

$=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi\omega}(\sin 4\omega-\sin 3\omega)\right)^2+\left(\frac{2}{\pi\omega}(2-\cos 3\omega-\cos 4\omega)\right)^2}$. Преобразуем полученное выражение с использованием различных формул тригонометрии:

$$\sqrt{\left(\frac{2}{\pi\omega}\left(\sin 4\omega-\sin 3\omega\right)\right)^2+\left(\frac{2}{\pi\omega}\left(2-\cos 3\omega-\cos 4\omega\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\pi|\omega|}\sqrt{6+2\cos 7\omega-4\cos 3\omega-4\cos 4\omega}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi|\omega|}\sqrt{3+\cos 7\omega-2\cos 3\omega-2\cos 4\omega}\,.$$

Итак: $A(\omega)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi|\omega|}\sqrt{3+\cos 7\omega-2\cos 3\omega-2\cos 4\omega}\,.$

Выражения для фазового спектра выглядят сложнее, поэтому их преобразовывать не будем:

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}|\omega|\left(\sin 4\omega-\sin 3\omega\right)}{2\omega\sqrt{3+\cos 7\omega-2\cos 3\omega-2\cos 4\omega}}\right), & \omega\geq 0;\\ -\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}|\omega|\left(\sin 4\omega-\sin 3\omega\right)}{2\omega\sqrt{3+\cos 7\omega-2\cos 3\omega-2\cos 4\omega}}\right), & \omega<0.\end{cases}$$

4.2. Запишем аналитическое выражение функции $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<-3;\\ -3-t, & -3\leq t<0;\\ 2-\dfrac{2t}{3}, & 0\leq t<3;\\ 0, & t\geq 3.\end{cases}$$

Для вычисления интегралов воспользуемся следующими формулами (проверьте их): $\int\left(ax\pm b\right)\cos cx\,dx=\dfrac{\left(ax\pm b\right)}{c}\sin cx+\dfrac{a}{c^2}\cos cx+C;$

$\int\left(ax\pm b\right)\sin cx\,dx=-\dfrac{\left(ax\pm b\right)}{c}\cos cx+\dfrac{a}{c^2}\sin cx+C.$

Тогда

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-3}^{0}(-3-t)\cos\omega t\,dt+\int\limits_{0}^{3}\left(2-\frac{2t}{3}\right)\cos\omega t\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-3-t)}{\omega}\sin\omega t\Big|_{-3}^{0}-\frac{1}{\omega^2}\cos\omega t\Big|_{-3}^{0}+\frac{\left(2-\frac{2t}{3}\right)}{\omega}\sin\omega t\Big|_{0}^{3}-\frac{2}{3\omega^2}\cos\omega t\Big|_{0}^{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos 3\omega-1}{\omega^2}+\frac{2(1-\cos 3\omega)}{3\omega^2}\right)=\frac{\cos 3\omega-1}{3\pi\omega^2};$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-3}^{0}(-3-t)\sin\omega t\,dt+\int\limits_{0}^{3}\left(2-\frac{2t}{3}\right)\sin\omega t\,dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-3-t)}{\omega}\cos\omega t\Big|_{-3}^{0}-\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\Big|_{-3}^{0}-\frac{\left(2-\frac{2t}{3}\right)}{\omega}\cos\omega t\Big|_{0}^{3}-\frac{2}{3\omega^2}\sin\omega t\Big|_{0}^{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{\omega}-\frac{\sin 3\omega}{\omega^2}+\frac{2}{\omega}-\frac{2\sin 3\omega}{3\omega^2}\right)=\frac{5}{\pi}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{\sin 3\omega}{3\omega^2}\right)=\frac{5(3\omega-\sin 3\omega)}{3\pi\omega^2}.$$

Найдем теперь

$$A(\omega)=\sqrt{(a(\omega))^2+(b(\omega))^2}=\sqrt{\left(\frac{\cos 3\omega-1}{3\pi\omega^2}\right)^2+\left(\frac{5(3\omega-\sin 3\omega)}{3\pi\omega^2}\right)^2}.$$

Итак: $A(\omega)=\dfrac{\sqrt{(\cos 3\omega-1)^2+(5(3\omega-\sin 3\omega))^2}}{3\pi\omega^2}.$

Преобразовывать далее полученное выражение не имеет смысла.

Выпишем выражение для фазового спектра. Поскольку при $x>0$ $\sin x<x,$ то $3\omega>\sin 3\omega$ при $\omega>0,$ а при $x<0$ имеем $\sin x>x,$ поэтому $3\omega<\sin 3\omega$ при $\omega<0.$ Применим правило Лопиталя для вычисления предела: $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{5(3\omega-\sin 3\omega)}{3\pi\omega^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{5-5\cos 3\omega}{2\pi\omega}=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{15\sin 3\omega}{2\pi}=0,$ тогда получаем следующее выражение для фазового спектра:

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\arccos\dfrac{\cos 3\omega-1}{\sqrt{(\cos 3\omega-1)^2+\left(5(3\omega-\sin 3\omega)\right)^2}}, & \omega\ge 0;\\ -\arccos\dfrac{\cos 3\omega-1}{\sqrt{(\cos 3\omega-1)^2+\left(5(3\omega-\sin 3\omega)\right)^2}}, & \omega< 0.\end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последнее время много говорится о компетентностном подходе и профессиональной направленности обучения математике. Профессиональная направленность математики связывается с овладением навыками применения математических знаний в области будущей профессиональной деятельности. Понятие математической подготовки расширяется, включая в себя не только фундаментальную математическую подготовку, но и профессионализацию обучения. Целью обучения математике становится не только овладение сис-темой знаний, умений и навыков для решения математических задач, но и развитие способностей применять эти знания для решения комплексных задач в профессиональной сфере.

Рассмотренные в пособии задания имеют колоссальную практическую значимость. Широка область применения интеграла Фурье и преобразования Фурье на практике. С помощью рассмотренного выше математического аппарата решается огромное количество реальных практических задач в физике, электротехнике, теоретической и прикладной механике, теории передачи сигнала, автоматике и телемеханике, радиосвязи, электроснабжении, защите информации, акустике и даже в теории музыки. Некоторые из такого рода задач в сотрудничестве со специальными кафедрами ОмГУПСа «Автоматика и телемеханика», «Системы передачи информации» и «Подвижной состав железных дорог» были решены одним из авторов данного пособия.

Широта и универсальность применения интеграла и преобразования Фурье позволили включить в пособие не только задачи на непосредственное нахождение интеграла и различных форм преобразования Фурье, но и профессионально-ориентированные задачи в рамках формирования соответствующей компетенции, такие как нахождение амплитудного и фазового спектров сигналов.

Использование такого рода заданий на практике связывается с интеграцией знаний и умений, освоением компетенций, возможностью качественной теоретической подготовки, необходимой для использования описанного в пособии математического аппарата в реальной профессиональной деятельности.

Библиографический список

1. Окишев, С. В. Функциональные ряды / С. В. Окишев, Ю. Г. Галич. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2011. – Ч. 4. – Текст : непосредственный.

2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н. С. Пискунов. – Москва : Физматлит, 1996. – Том 2. – Текст : непосредственный.

3. Ильин, В. А. Основы математического анализа / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. – Москва : Физматлит, 2002. – Ч. 2. – Текст : непосредственный.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : Оникс 21 век, 2003. – Ч. 2. – Текст : непосредственный.

Учебное издание

ШВЕД Елена Анатольевна,
ГАТЕЛЮК Олег Владимирович,
ШАНТАРЕНКО Валерий Георгиевич

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ: ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 30.06.2021. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,8.
Тираж 50 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35