Л. С. ПЕТРОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ MATHCAD

ОМСК 2021

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

Л. С. Петрова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ MATHCAD

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
для выполнения самостоятельной работы

Омск 2021

УДК 517.53:004.42(075.8)
ББК 22.161.5я73 + 32.973я73
П30

Элементы теории функций комплексного переменного с применением системы MathCAD: Учебно-методическое пособие / Л. С. Петрова; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2021. 37 с.

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические сведения, необходимые для освоения раздела «Теория функций комплексного переменного» при изучении дисциплины «Математика», примеры решения типовых задач с применением системы MathCAD, задания для самостоятельной работы. В настоящем издании рассматриваются методы решения задач основных разделов теории функций комплексного переменного, которые являются общими для многих учебных программ по инженерно-техническим направлениям и специальностям.

Предназначено для студентов технических специальностей и направлений подготовки очной и заочной форм обучения, магистрантов и аспирантов.

Библиогр.: 3 назв. Табл. 1. Рис. 24.

Рецензенты: доктор техн. наук, доцент Е. А. Сидорова;
канд. физ.-мат. наук И. А. Зубарева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие составляет часть методического обеспечения дисциплины «Математика» для студентов инженерно-технических специальностей и направлений подготовки.

Появление программных продуктов, предоставляющих возможность решать математические задачи как численно, так и в символьном виде, позволяет использовать современные программные средства в процессе обучения математическим дисциплинам. Применение автоматизированных математических систем (например, MathCAD), позволяющих решать широкий спектр математических задач при освоении специальных разделов математики, способствует интенсификации процесса обучения, глубокому усвоению материала и развитию у обучающихся способности применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Аппарат теории функций комплексного переменного (ТФКП), в частности, положения теории аналитических функций и теории комформного отображения, применяется для расчета плоских векторных полей, исследования устойчивости линейных систем, в теории операционного исчисления и при решении дифференциальных уравнений. Это позволяет эффективно использовать методы ТФКП при решении различных физических и технических задач (например, в электростатике, гидродинамике, теории упругости).

Данное пособие, отражая специфику технических специальностей вузов, содержит базовые теоретические сведения, поясняющие примеры с реализацией в системе MathCAD 14 (15), и задания для самостоятельной работы по основным разделам ТФКП. Представленное пособие рекомендуется использовать при комплексном подходе к решению задач по тематике данного раздела, предусматривающем выполнение задания двумя способами: непосредственно, без использования математических пакетов [2, 3] и с применением системы MathCAD. При несформированности базовых навыков числовых расчетов, символьных преобразований и математического моделирования в системе MathCAD, необходимых для освоения учебного материала данного пособия, рекомендуется использовать методические указания [1].

Материал пособия при необходимости может использоваться магистрантами и аспирантами инженерно-технических специальностей и направлений подготовки при самостоятельном изучении ТФКП.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение 1. Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

где x, y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$ (в технической литературе для мнимой единицы применяется также обозначение j при условии $j^2 = -1$). Данная форма записи комплексного числа называется алгебраической.

В теории функций комплексного переменного приняты следующие обозначения: $x = \text{Re}\, z$ – действительная часть комплексного числа, $y = \text{Im}\, z$ – мнимая часть комплексного числа.

Комплексное число можно изображать вектором с началом в точке $(0, 0)$ и концом в точке (x, y).

Определение 2. Длина радиус-вектора точки (x, y) называется модулем комплексного числа и обозначается символом $|z|$, ρ или r:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.2}$$

Определение 3. Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется угол, образованный радиус-вектором точки (x, y) с положительным направлением оси Ox.

Общий аргумент $\text{Arg}\, z$ определяется не однозначно из соотношения $\text{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$. Обычно выделяют главное значение аргумента, определяемое условием $-\pi < \varphi \le \pi$ и обозначаемое $\arg z$.

Взаимосвязь общего значения аргумента и главного представима в виде:

$$\text{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Определяя главное значение аргумента, используют следующие соотношения:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \ x > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \ x < 0, \ y \geq 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \ x < 0, \ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \ x = 0, \ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \ x = 0, \ y < 0. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Принимая во внимание, что $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, комплексное число можно представить в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1.5)$$

Для комплексного числа $z = 0$ модуль равен нулю, а аргумент не определен.

Применяя формулу Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, получают представление комплексного числа в показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (1.6)$$

Определение 4. Комплексносопряженным к числу $z = x + iy$ называется число $\overline{z} = x - iy$.

Пусть даны два числа: $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$. Над комплексными числами можно производить следующие основные операции: сложение (вычитание), умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня.

Сложение и вычитание комплексных чисел производится следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \ z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad (1.7)$$

Формулы умножения двух комплексных чисел в зависимости от формы записи (алгебраической, тригонометрической, показательной) имеют следующий вид:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2); \tag{1.8}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \tag{1.9}$$

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению, и производится следующим образом:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \tag{1.10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{1.11}$$

Возведение в степень комплексного числа и извлечение корня из комплексного числа производятся по формулам Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots; \tag{1.12}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.13}$$

Большинство операций в системе MathCAD по умолчанию осуществляется над комплексными числами. Для работы с комплексными числами можно использовать некоторые встроенные функции: Re(z), Im(z) – действительная и мнимая части комплексного числа z, arg(z) – главное значение аргумента комплексного числа z, $|z|$ – модуль комплексного числа z и др.

Перед использованием любых операций с комплексными числами полезно определить символы i или j как мнимую единицу, т. е. присвоить значение квадратного корня из -1. Оператор «$=$» служит для численного расчета, оператор «$\rightarrow$» используется для аналитического преобразования.

Обозначения некоторых известных функций в системе MathCAD, отличающиеся от общепринятых в математике, приведены в таблице.

Обозначение функций в системе MathCAD

Название функции	Обозначение в математике	Обозначение в системе MathCAD
Тангенс	tg	tan
Котангенс	ctg	cot
Гиперболический синус	sh	sinh
Гиперболический косинус	ch	cosh
Гиперболический тангенс	th	tanh
Гиперболический котангенс	cth	coth
Главное значение функции, обратной синусу	arcsin	asin
Главное значение функции, обратной косинусу	arccos	acos
Главное значение функции, обратной тангенсу	arctg	atan
Главное значение функции, обратной котангенсу	arcctg	acot
Главное значение функции, обратной гиперболическому синусу	arsh	asinh
Главное значение функции, обратной гиперболическому косинусу	arch	acosh
Главное значение функции, обратной гиперболическому тангенсу	arth	atanh
Главное значение функции, обратной гиперболическому котангенсу	arcth	acoth

П р и м е р 1. Представить комплексное число $z = \dfrac{2}{1-i}$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах записи.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования встроенных функций представлен на рис. 1.

Ввод комплексного числа:

$$i := \sqrt{-1} \quad z := \frac{2}{1-i}$$

Вычисление значения модуля и главного значения аргумента комплексного числа при численном расчете и аналитическом преобразовании:

$$|z| = 1.414 \quad |z| \to \sqrt{2} \quad \arg(z) = 0.785 \quad \arg(z) \to \frac{\pi}{4}$$

Представление комплексного числа в алгебраической форме:

$$\frac{2}{1-i} \to 1+i$$

Преобразование тригонометрической и показательной форм комплексного числа к алгебраической форме:

$$z := \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \to 1+i \qquad z := \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} \to 1+i$$

Рис. 1. Фрагмент документа MathCAD представления комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах

Пример 2. Вычислить комплексносопряженное число к комплексному числу $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Для определения комплексносопряженного числа к числу z необходимо ввести с клавиатуры z и затем символ «”». Для ввода мнимой единицы можно использовать палитру Calculator (Калькулятор).

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования палитры Calculator представлен на рис. 2.

$$z := 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Вычисление комплексносопряженного числа к комплексному числу с использованием аналитического преобразования и численного расчета:

$$z \to \frac{3}{2} + \frac{3i\cdot\sqrt{3}}{2} \quad \bar{z} \to \frac{3}{2} - \frac{3i\cdot\sqrt{3}}{2} \quad z = 1.5 + 2.598i \quad \bar{z} = 1.5 - 2.598i$$

Рис. 2. Фрагмент документа MathCAD вычисления комплексносопряженного числа к комплексному числу

В случае нетабличного значения аргумента комплексного числа использование команд rectangular из палитры Symbolic (Символьные преобразования) или complex (символьный модификатор комплексного числа) позволяет произвести аналитическое преобразование тригонометрической и показательной форм записи к алгебраической форме комплексного числа.

Пример 3. Представить комплексное число $z = \dfrac{i-3}{4+5i}$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах записи.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования операторов аналитического преобразования и численного расчета, команд rectangular и complex представлен на рис. 3.

$$\mathrm{i} := \sqrt{-1} \qquad \mathrm{z} := \frac{\mathrm{i}-3}{4+5\cdot\mathrm{i}}$$

Вычисление значения модуля и главного значения аргумента комплексного числа при численном расчете и аналитическом преобразовании:

$$|\mathrm{z}| = 0.494 \qquad |\mathrm{z}| \to \sqrt{\frac{10}{41}} \qquad \arg(\mathrm{z}) = 1.924 \qquad \arg(\mathrm{z}) \to \pi - \mathrm{atan}\left(\frac{19}{7}\right)$$

Представление комплексного числа в алгебраической форме:

$$\frac{\mathrm{i}-3}{4+5\cdot\mathrm{i}} \to -\frac{7}{41} + \frac{19}{41}\cdot\mathrm{i}$$

Преобразование тригонометрической формы комплексного числа к алгебраической форме:

$$\mathrm{z} := \sqrt{\frac{10}{41}}\cdot\left(\cos\left(\pi - \mathrm{atan}\left(\frac{19}{7}\right)\right) + \mathrm{i}\cdot\sin\left(\pi - \mathrm{atan}\left(\frac{19}{7}\right)\right)\right) \text{ complex} \to -\frac{7}{41} + \frac{19\mathrm{i}}{41}$$

Преобразование показательной формы комплексного числа к алгебраической:

$$\mathrm{z} := \sqrt{\frac{10}{41}}\cdot \mathrm{e}^{\left(\pi - \mathrm{atan}\left(\frac{19}{7}\right)\right)\cdot\mathrm{i}} \text{ rectangular} \to -\frac{7}{41} + \frac{19\mathrm{i}}{41}$$

Рис. 3. Фрагмент документа MathCAD представления комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах

Пример 4. Найти все корни уравнения $w^4 + 8 - 8\sqrt{3}i = 0$.

Для решения уравнения используется команда solve из палитры Symbolic, определяющая значения переменной, при которых содержащее ее выражение равно нулю.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования команды solve представлен на рис. 4.

$$w^4 + 8 - 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i \text{ solve}, w \;\rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} + i \\ -\sqrt{3} - i \\ -1 + \sqrt{3} \cdot i \\ 1 - \sqrt{3} \cdot i \end{pmatrix}$$

Рис. 4. Фрагмент документа MathCAD определения корней уравнения

В случае нетабличных значений аргументов комплексных чисел, полученных в результате решения уравнения, корни уравнения могут быть преобразованы к алгебраической форме и определены с использованием численного расчета.

Пример 5. Найти все корни уравнения $w^3 - 8 - 8\sqrt{3}i = 0$.

Фрагмент документа MathCAD определения и преобразования корней уравнения на основе использования оператора численного расчета, команд solve и rectangular представлен на рис. 5. В отличие от примера 4 для компактности записи вводится обозначение комплексного числа $z = -8 - 8\sqrt{3}i$.

$$z := -8 - 8\sqrt{3} \cdot i$$

$$w^3 + z \text{ solve}, w \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i \cdot \pi}{9}} \\ 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot i - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot i \\ -2^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot i + 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot i \end{pmatrix}$$

Преобразование и численный расчет корней уравнения:

$$w1 := 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{i \cdot \pi}{9}} \text{ rectangular} \rightarrow 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot i = 2.368 + 0.862i$$

$$w2 := 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot i - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot i = -0.438 - 2.482i$$

$$w3 := -2^{\frac{1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) - 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot i + 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot i = -1.93 + 1.62i$$

Рис. 5. Фрагмент документа MathCAD определения и преобразования корней уравнения

2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определение 5. Если каждому числу z области D комплексной плоскости по некоторому правилу f ставится в соответствие некоторое комплексное число w, то говорят, что в области D определена однозначная функция w комплексного переменного z. Обозначают такую функцию $w = f(z)$.

Задание комплексной функции $w = f(z)$ равносильно заданию двух вещественных функций переменных x и y: $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ таких, что $w = f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Вставлять функции в документ системы MathCAD можно тремя способами: 1) выбирая из списка встроенных функций; 2) вводом с клавиатуры; 3) используя арифметическую палитру (только для основных функций).

Пример 6. Вычислить значение функции $\mathrm{ch}\left(3 + \dfrac{\pi i}{4}\right)$.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования встроенной функции и команды rectangular представлен на рис. 6.

$$i := \sqrt{-1} \qquad w := \cosh\left(3 + \frac{\pi \cdot i}{4}\right)$$

Вычисление значения функции с использованием численного расчета и аналитического преобразования:

$$w = 7.119 + 7.084i$$

$$w \text{ rectangular } \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot \cosh(3)}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sinh(3)}{2} \cdot i$$

Рис. 6. Фрагмент документа MathCAD вычисления значения функции комплексного переменного

Для аналитического преобразования (упрощения выражения) в алгебраической форме может использоваться команда simplify из палитры Symbolic.

Пример 7. Вычислить значение функции $\mathrm{arth}\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)$.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования встроенной функции и команд rectangular и simplify представлен на рис. 7.

$$i := \sqrt{-1} \quad w := \operatorname{atanh}\left(\frac{4+3\cdot i}{5}\right)$$

$$w = 0.549 + 0.785i$$

$$w \text{ rectangular } \rightarrow \operatorname{Re}\left(\operatorname{atanh}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot i\right)\right) + \operatorname{Im}\left(\operatorname{atanh}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot i\right)\right)\cdot i$$

Аналитическое преобразование действительной и мнимой частей комплексного числа:

$$Rw := \operatorname{Re}\left(\operatorname{atanh}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot i\right)\right) \text{ simplify } \rightarrow \frac{\ln(18)}{4} - \frac{\ln(2)}{4} \text{ simplify } \rightarrow \frac{\ln(3)}{2}$$

$$Iw := \operatorname{Im}\left(\operatorname{atanh}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot i\right)\right) \text{ simplify } \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

Значение функции комплексного переменного:

$$w1 := Rw + i\cdot Iw \rightarrow \frac{\ln(3)}{2} + \frac{\pi\cdot i}{4}$$

Рис. 7. Фрагмент документа MathCAD вычисления значения функции комплексного переменного с использованием аналитических преобразований

В отдельных случаях для получения аналитического результата требуется предварительное использование формул, преобразующих исходную функцию к логарифмической.

Необходимо отметить, что для многозначных функций в системе MathCAD вычисляется только главное значение. Например, значение натурального логарифма вычисляется по формуле $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i = \ln r + i(\varphi + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$. В MathCAD вычисляется только главное значение $\ln z$, которое получается при $k = 0$.

Пример 8. Вычислить значение функции комплексного переменного $\operatorname{arcth}(1+i)$.

Непосредственное применение команд rectangular и simplify палитры Symbolic для вычисления значения данной функции не позволяет получить упрощенный результат в аналитическом виде. По этой причине при выполнении задания используется формула $\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}$, которая представлена в пособии [2, с. 20] и для главных значений имеет вид: $\operatorname{arcth}(1+i) = \frac{1}{2}\ln\frac{2+i}{i}$.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования встроенных функций и команды rectangular представлен на рис. 8.

$i := \sqrt{-1} \quad w := \mathrm{acoth}(1+i)$

Численный расчет значения функции:

$w = 0.402 - 0.554i$

Вычисление значения функции с использованием аналитического преобразования:

$w \text{ rectangular } \rightarrow \mathrm{Re}(\mathrm{acoth}(1+i)) + \mathrm{Im}(\mathrm{acoth}(1+i)) \cdot i$

Вычисление значения функции с использованием формул, преобразующих исходную функцию к логарифмической:

$$w1 := \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{2+i}{i}\right)$$

$$w1 \text{ rectangular } \rightarrow \frac{\ln(5)}{4} - \frac{\mathrm{atan}(2)}{2} \cdot i$$

$w1 = 0.402 - 0.554i$

Рис. 8. Фрагмент документа MathCAD вычисления значения функции комплексного переменного с предварительным использованием формул

3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, кроме, возможно, самой точки z_0.

Определение 6. Комплексное число w_0 называется пределом функции $f(z)$ при z, стремящемся к z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, принадлежащих окрестности точки z_0 и удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и $w_0 = u_0 + iv_0$, то $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$.

Определение 7. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение 8. Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке z и некоторой ее окрестности. Если существует и конечен предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) \tag{3.1}$$

при стремлении Δz к нулю произвольным образом, то этот предел называется производной этой функции в точке z, а сама функция называется дифференцируемой в данной точке.

Правила дифференцирования функции комплексного переменного такие же, как и для функции действительной переменной.

Необходимыми и достаточными условиями для дифференцируемости функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z = x + iy$ являются условия Коши – Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Определение 9. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция называется аналитической в области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Для любой аналитической функции $f(z)$ имеем:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.3}$$

Однозначные элементарные функции комплексного переменного, являющиеся аналогами функций действительного переменного, можно дифференцировать, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования [2, с. 22]. В общем случае для нахождения производной функции комплексного аргумента необходимо сначала проверить выполнение условий Коши – Римана. В тех точках комплексной плоскости, где условия (3.2) выполняются, производную можно найти, используя формулы (3.3).

Пример 9. Найти производную элементарной функции $w = \frac{\sin 2z}{e^z}$ в точке $z = 1 + i$.

Ввод оператора дифференцирования осуществляют с использованием палитры Calculus (Математический анализ) и установлением в помеченных позициях имен функции и аргумента.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования операторов дифференцирования, аналитического преобразования и численного расчета представлен на рис. 9.

$$\mathrm{w(z)} := \frac{\sin(2z)}{e^{z}}$$

Вычисление производной функции:

$$\mathrm{wd(z)} := \frac{d}{dz}\mathrm{w(z)} \rightarrow 2 \cdot \cos(2 \cdot z) \cdot e^{-z} - \sin(2 \cdot z) \cdot e^{-z}$$

$$z := 1 + i$$

Аналитический и численный результаты вычисления производной функции в точке z:

$$\mathrm{wd(z)} \rightarrow 2 \cdot e^{-1-i} \cdot \cos(2 + 2i) - e^{-1-i} \cdot \sin(2 + 2i) \qquad \mathrm{wd(z)} = -2.877 + 1.017i$$

Рис. 9. Фрагмент документа MathCAD вычисления производной функции

Пример 10. Показать, что функция $w = e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости.

Установление аналитичности функции на всей комплексной плоскости предусматривает проверку выполнения условий Коши – Римана с использованием оператора дифференцирования для определения частных производных реальной и мнимой составляющих функции.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования оператора дифференцирования и аналитического преобразования представлен на рис. 10.

$w(x, y) := e^{x+i\cdot y}$

Аналитическое преобразование функции комплексного переменного:

$w(x,y)$ rectangular $\to e^x \cdot \cos(y) + e^x \cdot \sin(y) \cdot i$

Проверка выполнения условий Коши – Римана:

$U(x,y) := \mathrm{Re}(w(x,y))$ $U(x,y)$ rectangular $\to e^x \cdot \cos(y)$

$V(x,y) := \mathrm{Im}(w(x,y))$ $V(x,y)$ rectangular $\to e^x \cdot \sin(y)$

$Udx(x,y) := \frac{d}{dx}U(x,y)$ $Udx(x,y)$ rectangular $\to e^x \cdot \cos(y)$

$Vdx(x,y) := \frac{d}{dx}V(x,y)$ $Vdx(x,y)$ rectangular $\to e^x \cdot \sin(y)$

$Udy(x,y) := \frac{d}{dy}U(x,y)$ $Udy(x,y)$ rectangular $\to -e^x \cdot \sin(y)$

$Vdy(x,y) := \frac{d}{dy}V(x,y)$ $Vdy(x,y)$ rectangular $\to e^x \cdot \cos(y)$

Вычисление производной функции:

$f(z) := e^z$

$fd(z) := \frac{d}{dz}f(z) \to e^z$

Рис. 10. Фрагмент документа MathCAD определения области аналитичности функции

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в любой точке (x, y) и $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, т. е. условия Коши – Римана выполняются при всех x и y. Таким образом, функция $w = e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости и $\left(e^z\right)' = e^z$.

Пример 11. Найти производную функции $w = z\,\mathrm{Re}\,z$.

Определение области аналитичности функции осуществляется посредством решения системы уравнений, включающей в себя условия Коши – Римана. Решение системы уравнений осуществляется с использованием встроенной функции Find(x, y), возвращающей вектор, содержащий значения, являющиеся решением системы уравнений. При вычислении производной с подстановкой значений переменных используется команда substitute из палитры Symbolic с вводом знака равенства из палитры Boolean (Булева алгебра).

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования встроенной функции, оператора дифференцирования, команд rectangular и substitute представлен на рис. 11.

$z(x,y) := x + i\cdot y \quad w(x,y) := z(x,y)\cdot \mathrm{Re}(z(x,y))$

Аналитическое преобразование функции комплексного переменного:

$w(x,y)$ rectangular $\rightarrow x^2 + x\cdot y\cdot i$

Проверка выполнения условий Коши – Римана:

$U(x,y) := \mathrm{Re}(w(x,y)) \quad U(x,y)$ rectangular $\rightarrow x^2$

$V(x,y) := \mathrm{Im}(w(x,y)) \quad V(x,y)$ rectangular $\rightarrow x\cdot y$

$Ux(x,y) := \frac{d}{dx}U(x,y) \quad Ux(x,y)$ rectangular $\rightarrow 2\cdot x$

$Vx(x,y) := \frac{d}{dx}V(x,y) \quad Vx(x,y)$ rectangular $\rightarrow y$

$Uy(x,y) := \frac{d}{dy}U(x,y) \quad Uy(x,y)$ rectangular $\rightarrow 0$

$Vy(x,y) := \frac{d}{dy}V(x,y) \quad Vy(x,y)$ rectangular $\rightarrow x$

Given

$Ux(x,y) = Vy(x,y) \quad Uy(x,y) = -Vx(x,y)$

$\mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Вычисление производной функции:

$wd(x,y) := Ux(x,y) + i\cdot Vx(x,y)$ rectangular $\rightarrow 2\cdot x + y\cdot i$ substitute, $x = 0, y = 0 \rightarrow 0$

Рис. 11. Фрагмент документа MathCAD определения области аналитичности функции и вычисления производной функции

Условия Коши – Римана выполняются только при $x = 0$ и $y = 0$. Таким образом, функция дифференцируема в единственной точке $z = 0$, производную в данной точке можно вычислить, используя формулы (3.3): $w'(0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}+i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=2+0=0.$

Отметим, что функция $w=z\operatorname{Re}z$ дифференцируема в точке $z=0,$ но не является аналитической в данной точке, так как не выполняется условие дифференцируемости в некоторой окрестности точки.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Интеграл от непрерывной функции комплексного переменного $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ вдоль кусочно-гладкой замкнутой или незамкнутой ориентированной кривой *C* вычисляется по формуле

$$\int_C f(z)dz=\int_C u(x, y)dx-v(x, y)dy+i\int_C v(x, y)dx+u(x, y)dy. \qquad (4.1)$$

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области *D*, то интеграл не зависит от пути интегрирования, а определяется лишь положением начальной и конечной точек дуги и вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz=\Phi(z_1)-\Phi(z_0), \qquad (4.2)$$

где $\Phi(z)$ – первообразная для функции $f(z)$.

Для нахождения первообразной функции по отношению к аналитической функции $f(z)$ применяются обычные формулы интегрирования аналогично случаю функции действительного переменного.

Если $f(z)$ – аналитическая функция и L – любой замкнутый кусочно-гладкий контур в односвязной области *D*, то

$$\int_L f(z)dz=0. \qquad (4.3)$$

Если кривая C задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, а начальная и конечная точки дуги соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\left(z(t)\right)z'(t)dt, \tag{4.4}$$

где $z = z(t) = x(t) + iy(t)$.

П р и м е р 12. Вычислить интеграл $\int_{1+i}^{-1-i}(3z+1)dz$.

Если интегрируемая функция является аналитической, то в некоторых версиях MathCAD интегралы можно вычислять непосредственно с использованием определенного интеграла из палитры Calculus и оператора аналитического преобразования. При непосредственном вычислении интеграла с подстановкой значений пределов интегрирования можно использовать команду substitute из палитры Symbolic с вводом знака равенства из палитры Boolean.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования оператора интегрирования и команды substitute представлен на рис. 12.

$$F1 := \int (3z+1)\,dz \text{ substitute}, z = 1 + i \rightarrow \frac{7}{6} + 4i$$

$$F2 := \int (3z+1)\,dz \text{ substitute}, z = -1 - i \rightarrow -\frac{5}{6} + 2i$$

$$I := F2 - F1 \rightarrow -2 - 2i$$

Рис. 12. Фрагмент документа MathCAD вычисления интеграла

П р и м е р 13. Вычислить интеграл $\int_C \operatorname{Re} z dz$, если 1) $C-$ прямолинейный отрезок, соединяющий точки $O(0, 0)$ и $A(2, 2)$; 2) $C-$ ломаная OBA, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$, $A(2, 2)$.

1) Уравнение прямой OA $y = x$. Необходимо представить подынтегральное выражение как функцию от переменной x и интегрировать по отрезку $[0, 2]$.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования операторов интегрирования и дифференцирования представлен на рис. 13.

$$y(x) := x \quad z(x) := x + i \cdot y(x)$$

$$I := \int_0^2 \mathrm{Re}(z(x)) \cdot \left(\frac{d}{dx} z(x)\right) dx \rightarrow 2 + 2i$$

Рис. 13. Фрагмент документа MathCAD вычисления интеграла по отрезку прямой $y = x$

2) Уравнение отрезка прямой OB $y = 0$, тогда на первом участке следует интегрировать по $x \in [0, 2]$. Уравнение прямой BA $x = 2$, интегрировать следует по $y \in [0, 2]$.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования операторов интегрирования и дифференцирования представлен на рис. 14.

Вычисление интеграла по отрезку прямой $y = 0$:

$$y(x) := 0 \quad z(x) := x + i \cdot y(x)$$

$$I\_1 := \int_0^2 \mathrm{Re}(z(x)) \cdot \left(\frac{d}{dx} z(x)\right) dx \rightarrow 2$$

Вычисление интеграла по отрезку прямой $x = 2$:

$$x(y) := 2 \quad z(y) := x(y) + i \cdot y$$

$$I\_2 := \int_0^2 \mathrm{Re}(z(y)) \cdot \left(\frac{d}{dy} z(y)\right) dy \rightarrow 4i$$

$$I := I\_1 + I\_2 \rightarrow 2 + 4i$$

Рис. 14. Фрагмент документа MathCAD вычисления интеграла вдоль ломаной по отрезкам прямых $y = 0$ и $x = 2$

П р и м е р 14. Вычислить интеграл $\int_C (2z+1)\bar{z}dz$, если C – верхняя половина окружности с центром в начале координат единичного радиуса; направление обхода положительное.

Параметрические уравнения окружности $x=\cos t,\ y=\sin t.$ При $x_1=1,\ y_1=0$ значение $t_1=0,$ при $x_2=-1,\ y_2=0$ параметр $t_2=\pi.$

Необходимо представить подынтегральное выражение как функцию от переменной t и интегрировать на отрезке $[0,\ \pi]$.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования встроенных функций, операторов интегрирования и дифференцирования представлен на рис. 15.

$$x(t) := \cos(t) \quad y(t) := \sin(t) \quad z(t) := x(t) + i\cdot y(t)$$

$$I := \int_0^{\pi} (2z(t)+1)\cdot\overline{z(t)}\cdot\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)dt \rightarrow -4+\pi\cdot i$$

Рис. 15. Фрагмент документа MathCAD вычисления интеграла вдоль дуги окружности

5. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Если $f(z)-$ однозначная аналитическая функция в точке $z=a,$ то в окрестности этой точки функция имеет разложение в степенной ряд Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n, \tag{5.1}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ (n=0, 1, 2, ...), \tag{5.2}$$

где $C-$ окружность с центром в точке $z=a,$ целиком лежащая в окрестности точки $a,$ в которой функция $f(z)$ аналитична. Окружность круга сходимости ряда имеет центр в точке a и проходит через ближайшую к этой точке особую точку z_n функции $f(z)$ (каждая точка, в которой нарушается аналитичность функции, является для этой функции особой точкой).

Если $f(z)-$ однозначная аналитическая функция в кольце $r<|z-a|<R$ (не исключается $r=0$ и $R=+\infty$), то внутри этого кольца функция имеет разложение в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n+\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \tag{5.3}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \ (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{5.4}$$

где $C-$произвольный замкнутый контур внутри кольца, в частности, окружность с центром в точке a, лежащая внутри данного кольца.

Ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ называется главной частью ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ называется правильной частью ряда Лорана.

Определение 10. Точка a называется нулем функции $f(z)$ порядка (или кратности) n, если функция $f(z)$ является аналитической в точке a и выполняются условия: $f(a)=0, f'(a)=0, \ldots, f^{(n-1)}(a)=0, f^{(n)}(a)\neq 0.$ Если $n=1$, то точка a называется простым нулем.

Определение 11. Точка a, $a\neq\infty$, в которой нарушается аналитичность функции $f(z)$, является для этой функции особой точкой.

Определение 12. Точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z=a$.

Определение 13. Изолированная особая точка a называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке a.

Определение 14. Изолированная особая точка a называется полюсом функции $f(z)$, если $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$.

О п р е д е л е н и е 15. Изолированная особая точка a называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если в точке a функция $f(z)$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

Для определения характера особой точки используются следующие утверждения.

1. Для того чтобы точка a являлась устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a не содержало главной части.

2. Для того чтобы точка a являлась полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a содержала конечное число членов (причем наивысшая степень $\frac{1}{z-a}$, встречающаяся в ряде Лорана, совпадает с порядком полюса).

3. Точка a тогда и только тогда является существенно особой точкой для $f(z)$, когда главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a содержит бесконечно много отрицательных степеней $(z-z_0)$.

П р и м е р 15. Найти разложение в ряд Тейлора аналитической функции $f(z)=\mathrm{ch}z$ по степеням z.

Для представления функции в виде ряда в системе MathCAD используется команда series из палитры Symbolic с заданием переменной, по которой производится разложение, и порядка аппроксимации.

Представление функции в виде ряда в системе MathCAD можно получить, используя главное меню. Необходимо задать функцию и выделить рамкой переменную, по которой будет проводиться разложение, затем используются пункт главного меню Symbolic (Символьные операции), процедуры Variable (Переменная) и Expand to Series (Разложить в ряд). В последнем пункте задается порядок аппроксимации.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования команды series представлен на рис. 16.

$$\boxed{\cosh(z)\ \text{series}, z, 8\ \rightarrow 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720}}$$

Рис. 16. Фрагмент документа MathCAD разложения функции в ряд Тейлора

Пример 16. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)^2(z+3)}$ и найти радиус сходимости ряда.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования команды series представлен на рис. 17.

$$f(z) := \frac{z+2}{(z-1)^2 \cdot (z+3)}$$

$$f(z) \text{ series}, z, 6 \ \to \frac{2}{3} + \frac{13 \cdot z}{9} + \frac{59 \cdot z^2}{27} + \frac{238 \cdot z^3}{81} + \frac{896 \cdot z^4}{243} + \frac{3235 \cdot z^5}{729}$$

Рис. 17. Фрагмент документа MathCAD разложения функции в ряд по степеням z

Ближайшей к точке $z=0$ особой точкой данной функции является точка $z=1$ (точка, в которой нарушается аналитичность функции), поэтому радиус сходимости полученного ряда $R=1$.

Пример 17. Найти разложение функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(z-2)}$ в ряд Лорана: 1) в окрестности точки $z=0$; 2) в окрестности точки $z=2$.

1) Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования команды series представлен на рис. 18.

$$f(z) := \frac{\sin(z)}{z^3 \cdot (z-2)}$$

$$f(z) \text{ series}, z, 6 \ \to -\frac{1}{24} - \frac{1}{4 \cdot z} - \frac{z}{48} - \frac{7 \cdot z^2}{480} - \frac{1}{2 \cdot z^2} - \frac{7 \cdot z^3}{960}$$

Рис. 18. Фрагмент документа MathCAD разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$

2) Для выполнения задания необходимо предварительно преобразовать функцию $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(z-2)}$. При $t=z-2$ имеем: $f(t)=\dfrac{\sin(t+2)}{(t+2)^3 t}$.

Для приближенного вычисления коэффициентов разложения можно воспользоваться командой float из палитры Symbolic или пунктом главного меню Symbolic (Символьные операции), процедурами Evaluate (Вычисление) и Floating Point (С плавающей точкой). В последнем пункте указывается количество знаков после запятой.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования команд series и float представлен на рис. 19.

$$f(t) := \frac{\sin(2+t)}{(2+t)^3 \cdot (t)}$$

$$F(t) := f(t)\,\text{series}, 4 \rightarrow \frac{\cos(2)}{8} - \frac{3\cdot\sin(2)}{16} - t\cdot\left(\frac{3\cdot\cos(2)}{16} - \frac{\sin(2)}{8}\right) + \frac{\sin(2)}{8\cdot t} + t^2\cdot\left(\frac{\cos(2)}{6} - \frac{\sin(2)}{16}\right)$$

$$F(t)\ \text{float}, 2 \ \rightarrow 0.19\cdot t + \frac{0.11}{t} + -0.13\cdot t^2 - 0.22$$

Рис. 19. Фрагмент документа MathCAD разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=2$

Переписывая полученное выражение с заменой t на $z-2$, получаем разложение функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=2$:

$$\frac{\sin z}{z^3(z-2)} = \frac{0.11}{z-2} - 0.22 + 0.19\cdot(z-2) - 0.13\cdot(z-2)^2 + \dots .$$

Пример 18. Найти разложение функции $f(z) = \dfrac{z-2}{z^2+2z-3}$ по степеням z в ряд Тейлора или Лорана в областях аналитичности функции.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z=1$ и $z=-3$. Следовательно, необходимо рассмотреть три области с центром в точке $z=0$, в каждой из которых $f(z)$ является аналитической функцией: круг $|z|<1$, кольцо $1<|z|<3$ и внешность круга $|z|>3$ (т. е. кольцо $3<|z|<+\infty$).

1) Степенной ряд для функции $f(z) = \dfrac{z-2}{z^2+2z-3}$ в области $|z|<1$ является рядом Тейлора, так как рассматриваемая область аналитичности функции имеет форму круга.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования команды series представлен на рис. 20.

$$f(z) := \frac{z-2}{z^2+2z-3}$$

$$f(z)\ \text{series}, z, 6\ \rightarrow \frac{2}{3}+\frac{z}{9}+\frac{8\cdot z^2}{27}+\frac{19\cdot z^3}{81}+\frac{62\cdot z^4}{243}+\frac{181\cdot z^5}{729}$$

Рис. 20. Фрагмент документа MathCAD разложения функции в ряд Тейлора при $|z|<1$

2) Степенной ряд функции для функции $f(z)=\dfrac{z-2}{z^2+2z-3}$ в области $1<|z|<3$ является рядом Лорана, так как рассматриваемая область аналитичности функции имеет форму кольца.

Для представления функции $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей $\dfrac{z-2}{z^2+2z-3}=\dfrac{5}{4(z+3)}-\dfrac{1}{4(z-1)}$ в системе MathCAD используется команда parfrac из палитры Symbolic.

Ряд для функции $-\dfrac{1}{4(z-1)}$ расходится при $|z|>1$, а ряд для функции $\dfrac{5}{4(z+3)}$ остается сходящимся в данном кольце, так как $|z|<3$. Поэтому чтобы получить разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана, суммируют разложение дроби $\dfrac{5}{4(z+3)}$ по степеням z с разложением простейшей дроби $\dfrac{-1}{4(z-1)}$ по степеням $\dfrac{1}{z}$. При этом преобразуется вторая простейшая дробь $\dfrac{-1}{4(z-1)}=-\dfrac{1}{4z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}$ и записывается разложение сомножителя $\dfrac{1}{1-t}$ по степеням t.

При выполнении замены можно использовать команду substitute из палитры Symbolic с вводом знака равенства из палитры Boolean. Применение команды expand позволяет после выполнения преобразований получить выражение в виде ряда.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования команд parfrac, series, substitute и expand представлен на рис. 21.

Представление функции в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)\ \text{parfrac}\ \rightarrow \frac{5}{4\cdot(z+3)}-\frac{1}{4\cdot(z-1)}$$

Разложение в ряд Лорана первой дроби:

$$f1(z):=\frac{5}{4\cdot(z+3)}\ \text{series},z,5\ \rightarrow \frac{5}{12}-\frac{5\cdot z}{36}+\frac{5\cdot z^2}{108}-\frac{5\cdot z^3}{324}+\frac{5\cdot z^4}{972}$$

Разложение в ряд Лорана второй дроби:

$$\frac{-1}{4\cdot(z-1)}=\frac{-1}{4z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$\frac{1}{1-t}\ \text{series},t,5\ \rightarrow 1+t+t^2+t^3+t^4$$

$$1+t+t^2+t^3+t^4\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute},t=\frac{1}{z}\\ \text{expand}\end{array}\right.\rightarrow \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+1$$

$$f2(z):=\frac{-1}{4z}\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+1\right)\ \text{expand}\rightarrow -\frac{1}{4\cdot z}-\frac{1}{4\cdot z^2}-\frac{1}{4\cdot z^3}-\frac{1}{4\cdot z^4}-\frac{1}{4\cdot z^5}$$

Разложение функции в ряд Лорана:

$$f1(z)+f2(z)\rightarrow\frac{5\cdot z^2}{108}-\frac{1}{4\cdot z}-\frac{1}{4\cdot z^2}-\frac{5\cdot z}{36}-\frac{1}{4\cdot z^3}-\frac{5\cdot z^3}{324}-\frac{1}{4\cdot z^4}+\frac{5\cdot z^4}{972}-\frac{1}{4\cdot z^5}+\frac{5}{12}$$

Рис. 21. Фрагмент документа MathCAD разложения функции
в ряд Лорана при $1<|z|<3$

3) Степенной ряд функции для функции $f(z)=\dfrac{z-2}{z^2+2z-3}$ в области $|z|>3$ является рядом Лорана, так как рассматриваемая область аналитичности функции имеет форму кольца.

При выполнении этой части задания используется полученное во втором пункте представление функции $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей $\dfrac{z-2}{z^2+2z-3}=\dfrac{5}{4(z+3)}-\dfrac{1}{4(z-1)}$. При $|z|>3$ ряды для функций $-\dfrac{1}{4(z-1)}$ и $\dfrac{5}{4(z+3)}$ расходятся. Поэтому чтобы получить разложение функции $f(z)$ в ряд

Лорана, суммируют разложение дробей $\frac{-1}{4(z-1)}$ и $\frac{5}{4(z+3)}$ по степеням $\frac{1}{z}$. Для этого преобразуются первая и вторая простейшие дроби следующим образом: $\frac{-1}{4(z-1)}=-\frac{1}{4z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$, $\frac{5}{4\left(z+3\right)}=\frac{5}{4z}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z}}$ с дальнейшим представлением дробей $\frac{1}{1-t}$ и $\frac{1}{1+t}$ в виде ряда по степеням t.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования команд parfrac, series, substitute и expand представлен на рис. 22.

$$f(z)\ \text{parfrac}\ \rightarrow \frac{5}{4\cdot(z+3)}-\frac{1}{4\cdot(z-1)}$$

$$\frac{-1}{4\cdot(z-1)}=\frac{-1}{4z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$\frac{1}{1-t}\ \text{series},t,5\ \rightarrow 1+t+t^2+t^3+t^4$$

$$1+t+t^2+t^3+t^4\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute},t=\frac{1}{z}\\ \text{expand}\end{array}\right.\rightarrow \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+1$$

$$f2(z):=\frac{-1}{4z}\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+1\right)\ \text{expand}\rightarrow -\frac{1}{4\cdot z}-\frac{1}{4\cdot z^2}-\frac{1}{4\cdot z^3}-\frac{1}{4\cdot z^4}-\frac{1}{4\cdot z^5}$$

$$\frac{5}{4\cdot(z+3)}=\frac{5}{4z}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z}}$$

$$\frac{1}{1+t}\ \text{series},t,5\ \rightarrow 1-t+t^2-t^3+t^4$$

$$1-t+t^2-t^3+t^4\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute},t=\frac{3}{z}\\ \text{expand}\end{array}\right.\rightarrow \frac{9}{z^2}-\frac{3}{z}-\frac{27}{z^3}+\frac{81}{z^4}+1$$

$$f3(z):=\frac{5}{4z}\cdot\left(\frac{9}{z^2}-\frac{3}{z}-\frac{27}{z^3}+\frac{81}{z^4}+1\right)\ \text{expand}\rightarrow \frac{5}{4\cdot z}-\frac{15}{4\cdot z^2}+\frac{45}{4\cdot z^3}-\frac{135}{4\cdot z^4}+\frac{405}{4\cdot z^5}$$

$$f2(z)+f3(z)\rightarrow \frac{1}{z}-\frac{4}{z^2}+\frac{11}{z^3}-\frac{34}{z^4}+\frac{101}{z^5}$$

Рис. 22. Фрагмент документа MathCAD разложения функции в ряд Лорана при $|z|>3$

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫЧЕТОВ ФУНКЦИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Определение 16. Вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$ относительно конечной изолированной особой точки a называется число, обозначаемое $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)$ и определяемое значением интеграла, взятого в положительном направлении:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz, \tag{6.1}$$

где C – любая окружность с центром в точке a достаточно малого радиуса такого, чтобы окружность не выходила за пределы области аналитичности функции $f(z)$ и не содержала внутри других особых точек данной функции.

Используются и другие обозначения вычета функции: $\operatorname{Res}\left[f(z); a\right]$ и $\operatorname{res} f(a)$.

Вычет функции $f(z)$ относительно конечной изолированной особой точки равен коэффициенту при $(z-z_0)^{-1}$ в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z=a$:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \tag{6.2}$$

Если точка a – устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = 0$.

Если точка a – полюс n-го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}\left[f(z)(z-a)^n\right]}{dz^{n-1}}. \tag{6.3}$$

Если точка a – простой полюс ($n=1$), то $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}\left[f(z)(z-a)\right]$.

Если $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – аналитические функции, $f_1(a) \neq 0$, $f_2(a) = 0$, $f_2'(a) \neq 0$ (т. е. точка a – простой полюс функции $f(z)$), то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}. \qquad (6.4)$$

Вычет функции $f(z)$ относительно существенно особой точки равен коэффициенту c_{-1} в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z = a$.

Определение 17. Вычетом аналитической функции $f(z)$ относительно бесконечно удаленной изолированной особой точки называется число, обозначаемое $\operatorname*{res}_{\infty} f(z)$ и определяемое значением интеграла:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)\,dz, \qquad (6.5)$$

где C^- – достаточно большая окружность с центром в точке $z = 0$, проходимая по часовой стрелке и содержащая внутри себя все особые точки функции, кроме точки $z = \infty$.

Вычет функции $f(z)$ относительно бесконечно удаленной изолированной особой точки равен коэффициенту при $(z - z_0)^{-1}$ в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$, взятому с противоположным знаком:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}. \qquad (6.6)$$

Теорема Коши о вычетах. Если функция $f(z)$ является аналитической на границе C области D и внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, ..., a_n$, то

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z). \qquad (6.7)$$

Пример 19. Найти вычет функции $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z^2}$ относительно особой точки.

Функция $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z^2}$ имеет единственную особую точку $z = 0$. Для установления характера особой точки необходимо разложить данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$. Для этого записывается разложение функции

$\sin t$ по степеням t и выполняется подстановка $t = \dfrac{1}{z^2}$ с последующим умножением на z^3.

Комплексное использование команд substitute и expand из палитры Symbolic позволяет при выполнении замены получить выражение в виде ряда.

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования встроенных функций и команд series, substitute и expand представлен на рис. 23.

Разложение функции $\sin t$ по степеням t:

$$\sin(\mathrm{t})\ \text{series}, 8\ \rightarrow \mathrm{t} - \frac{\mathrm{t}^3}{6} + \frac{\mathrm{t}^5}{120} - \frac{\mathrm{t}^7}{5040}$$

Разложение заданной функции в ряд Лорана с использованием подстановки:

$$\mathrm{t} - \frac{\mathrm{t}^3}{6} + \frac{\mathrm{t}^5}{120} - \frac{\mathrm{t}^7}{5040} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, \mathrm{t} = \dfrac{1}{\mathrm{z}^2} \\ \text{expand} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{\mathrm{z}^2} - \frac{1}{6 \cdot \mathrm{z}^6} + \frac{1}{120 \cdot \mathrm{z}^{10}} - \frac{1}{5040 \cdot \mathrm{z}^{14}}$$

$$\mathrm{z}^3 \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{z}^2} - \frac{1}{6 \cdot \mathrm{z}^6} + \frac{1}{120 \cdot \mathrm{z}^{10}} - \frac{1}{5040 \cdot \mathrm{z}^{14}} \right) \text{expand} \rightarrow \mathrm{z} - \frac{1}{6 \cdot \mathrm{z}^3} + \frac{1}{120 \cdot \mathrm{z}^7} - \frac{1}{5040 \cdot \mathrm{z}^{11}}$$

Рис. 23. Фрагмент документа MathCAD вычисления разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$

Так как лорановское разложение функции в окрестности точки $z = 0$ содержит бесконечное число членов в главной части, то данная точка является существенно особой точкой функции $f(z)$. Тогда $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 0.$

П р и м е р 20. Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{1}{z^5 - z^3} dz$, где C – окружность $|z| = 3$.

С помощью команды factor из палитры Symbolic можно разложить на множители знаменатель дроби и определить особые точки функции $f(z) = \dfrac{1}{z^5 - z^3}$. Внутри окружности находятся особые точки: $z_1 = 0$ – полюс третьего порядка, $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{z^3 (z-1)(z+1)} = \infty$, $z_2 = 1$ – полюс первого порядка,

$\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1}{z^3(z-1)(z+1)}=\infty$, $z_3=-1-$ полюс первого порядка, $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{1}{z^3(z-1)(z+1)}=\infty.$

Следовательно, используя формулу (6.7), для вычисления интеграла достаточно найти вычеты функции в особых точках:

$$\oint\limits_C \frac{1}{z^5-z^3}dz=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0}\frac{1}{z^5-z^3}+\operatorname*{res}_{z=1}\frac{1}{z^5-z^3}+\operatorname*{res}_{z=-1}\frac{1}{z^5-z^3}\right).$$

Фрагмент документа MathCAD с выполнением задания на основе использования команды factor, операторов аналитического преобразования, дифференцирования и вычисления предела функции представлен на рис. 24.

Разложение на множители знаменателя дроби:

$$\frac{1}{z^5-z^3}\ \text{factor}\ \to \frac{1}{z^3\cdot(z-1)\cdot(z+1)}$$

Определение вычета функции в точке $z=0$:

$$\mathrm{res1}(z):=\frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z^5-z^3}\cdot z^3\right)\to -1$$

Определение вычета функции в точке $z=1$:

$$\mathrm{res2}(z):=\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{z^5-z^3}\cdot(z-1)\right]\to\frac{1}{2}$$

Определение вычета функции в точке $z=-1$:

$$\mathrm{res3}(z):=\lim_{z\to -1}\left[\frac{1}{z^5-z^3}\cdot(z+1)\right]\to\frac{1}{2}$$

Вычисление интеграла функции:

$$\mathrm{I}(z):=2\cdot\pi\cdot i\cdot(\mathrm{res1}(z)+\mathrm{res2}(z)+\mathrm{res3}(z))\to 0$$

Рис. 24. Фрагмент документа MathCAD вычисления интеграла функции с применением вычетов

7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Все задания необходимо выполнить с использованием системы MathCAD.

1. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа z. Представить комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах записи: а) $z = \dfrac{1+i}{1-i}$; б) $z = \dfrac{3-i}{4+5i}$.

2. Найти все корни уравнения: а) $w^4 + 8\sqrt{3}i = 0$; б) $w^3 + 8 - 8\sqrt{3}i = 0$.

3. Вычислить значение функции комплексного переменного: а) $\operatorname{sh}\left(3 + \dfrac{\pi i}{6}\right)$; б) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3\sqrt{3} - 8i}{7}\right)$.

4. Показать, что функция является аналитической на всей комплексной плоскости, и вычислить ее производную: а) $w = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3 - 1\right)$; б) $w = \cos z$.

5. Вычислить интегралы: а) $\displaystyle\int_{1-2i}^{3} z\,dz$; б) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} ze^z\,dz$.

6. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_C \operatorname{Im} z\,dz$, если а) $C-$ прямолинейный отрезок, соединяющий точки (0, 0) и (2, 1); б) $C-$ ломаная OBA, $O(0, 0)$, $B(0, 1)$, $A(2, 1)$.

7. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_C |z|\bar{z}\,dz$, если $C-$ верхняя половина окружности с центром в начале координат единичного радиуса; направление обхода положительное.

8. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $f(z) = \operatorname{tg} z$ и найти радиус сходимости ряда.

9. Найти разложение функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z - 6}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = -2$.

10. Найти разложение функции $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2 + z - 2}$ по степеням z в ряд Тейлора или Лорана в областях аналитичности функции.

11. Найти вычеты в особых точках следующих функций:

а) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z+1}$; б) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$.

12. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_C \dfrac{e^z}{z}dz$, где $C-$ окружность $|z|=1$; б) $\oint\limits_C \operatorname{tg} z\,dz$, где $C-$ окружность $|z|=2$.

Библиографический список

1. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов : методические указания к выполнению лабораторных работ и самостоятельной работы / Н. В. Голубева. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2014. – Ч. 1. – 40 с. – Текст : непосредственный.

2. Рубанова, Н. А. Теория функций комплексной переменной : учебно-методическое пособие / Н. А. Рубанова, О. А. Заблоцкая. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2015. – Ч. 1. – 29 с. – Текст : непосредственный.

3. Рубанова, Н. А. Теория функций комплексной переменной : учебно-методическое пособие / Н. А. Рубанова, О. А. Заблоцкая. – Омск : Омский гос. ун-т путей сообщения, 2016. – Ч. 2. – 29 с. – Текст : непосредственный.

Учебное издание

ПЕТРОВА Лилия Сергеевна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ MATHCAD

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

***

Подписано в печать 19. 03.2021. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,5.
Тираж 50 экз. Заказ .

**

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35