В. А. ФЁДОРОВ,

Е. А. ШВЕД

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ОМСК 2021

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Омский государственный университет путей сообщения

В. А. Фёдоров,
Е. А. Швед

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Утверждено методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия
для выполнения индивидуальной самостоятельной работы

Омск 2021

УДК 514.742.4(075.8)
ББК 22.151.51я73
Ф33

Элементы теории поля: Учебно-методическое пособие / В. А. Фёдоров, Е. А. Швед; Омский гос. ун-т путей сообщения. Омск, 2021. 40 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения по теории скалярных и векторных полей, основные определения и теоремы. Рассмотрены примеры решения основных типов задач по вычислению градиента и производной по направлению скалярного поля, потока и циркуляции векторного поля.

Предназначено для студентов второго курса всех направлений подготовки очной формы обучения. Пособие может быть использовано также студентами заочной формы обучения.

Библиогр.: 6 назв. Рис. 15.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доцент В. В. Дмитриев;
канд. техн. наук, доцент Т. В. Ковалева.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для первоначального ознакомления с теорией поля. Приведены основные определения и теоремы теории, типы полей, их свойства. Представлены примеры подробных решений основных типов задач в теории поля.

По сути, с точки зрения математики, в теории поля получает дальнейшее развитие и обобщается понятие функции – до скалярного и векторного полей и понятие производной – до градиента, дивергенции и ротора.

Теория поля находит применение во многих областях естествознания. Практически всюду, где задаётся скалярная или векторная функция нескольких аргументов, применимы теоремы, формулы и выводы теории поля. Особенно наглядно это проявляется при рассмотрении гравитационных, электромагнитных и вообще силовых полей, а также в процессах, в результате которых возникает многомерная скалярная или векторная величина.

В данном пособии рассмотрение основ теории поля ограничивается случаем трёхмерного пространства как самым востребованным на практике и наиболее лаконичным в изложении.

Для эффективного и полного рассмотрения вопросов, представленных в настоящем пособии, читателю необходимы знания разделов математического анализа о кратных, криволинейных и поверхностных интегралах, аналитической геометрии в трёхмерном пространстве и векторной алгебры.

1. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

Скалярное поле является обобщением функции одной переменной. По сути, одномерное скалярное поле есть числовая ось или совокупность отдельных её частей – отрезков и лучей, на которых задана функция одного аргумента. Если рассматривается плоскость или совокупность отдельных её областей – фигур, полос, секторов, полуплоскостей и т. п., на которых задана функция двух переменных, то её называют двумерным скалярным полем. Популярно следующее определение скалярного поля.

Определение. *Скалярным полем* называется область n-мерного пространства, каждой точке которого ставится в соответствие число.

Скалярные поля могут изменяться во времени, но мы будем рассматривать только стационарные поля.

Определение. Скалярное поле называется *стационарным*, если его скалярная функция $U = U(x; y; z)$ не зависит от времени.

Примерами скалярного поля могут являться области, на которых распределена величина, имеющая только одну количественную характеристику: поле давления, влажности, потенциала, температуры, плотности и т. д. Трёхмерные скалярные поля часто изображаются с помощью поверхностей равного уровня, а двумерные – изолиний – таких точек пространства, в которых функция поля имеет одинаковое значение и описывается, соответственно, уравнением: $U(x; y; z) = \text{const}$. В естественных науках эти поверхности или линии иногда имеют собственные названия: изотермы, изобары, изохоры и т. д.

Плоское поле температур (сечение трёхмерного поля) вокруг нагретого тела прямоугольной формы для примера изображено с помощью изотерм на рис. 1.1.

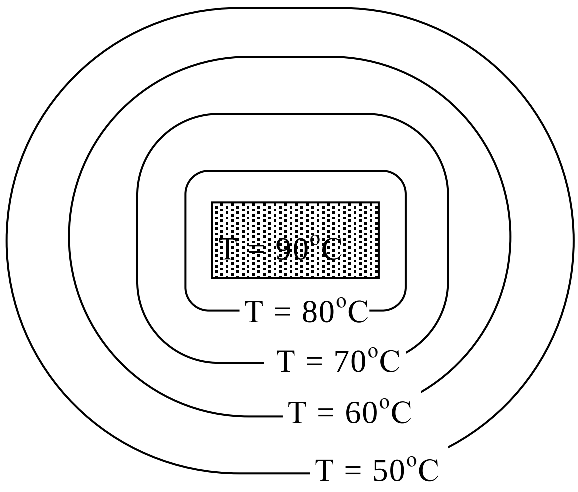

Рис. 1.1. Изотермические линии поля температур

Потребности естественных наук, как правило, ограничиваются трёхмерным пространством (пространством R^3), поэтому мы в основном будем рассматривать трёхмерные скалярные поля.

Можно сказать, что трёхмерное скалярное поле является областью или совокупностью областей трёхмерного пространства (обычно это тела, хотя могут быть и неограниченные области), на которых задана функция трёх переменных. Понятно, что скалярное поле не может выходить за пространственные рамки области определения заданной полевой функции.

2. ПРОИЗВОДНАЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Атрибутика n-мерных скалярных полей многообразнее, чем функции одной переменной. Так, например, у функции одного аргумента существует производная – число, показывающее то, во сколько раз скорость возрастания функции в заданной точке больше скорости возрастания своего аргумента. Здесь «возрастание аргумента» понимается буквально – увеличивается его абсцисса. Мы всегда можем сказать, какой аргумент больше, а какой – меньше. В случае многомерных скалярных полей, описываемых функциями нескольких переменных, мы не можем установить отношения «больше» или «меньше» для координат двух точек. К примеру, абсурден вопрос о том, какие координаты больше – (5; –8; 2) или (–4; 7; 3). Поэтому для n-мерного скалярного поля существует бесчисленное множество производных в заданной точке M в зависимости от направления, в котором изменяются координаты.

Пусть в некотором трёхмерном скалярном поле $U = U(M)$ дана точка $M(x; y; z)$ и единичный вектор

$$\vec{l}_0 = \vec{i}\cos(\alpha) + \vec{j}\cos(\beta) + \vec{k}\cos(\gamma). \tag{2.1}$$

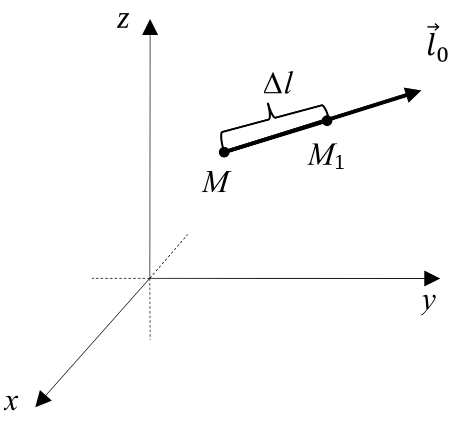

Рис. 2.1. Приращение поля в точке M в направлении $\vec{l}_0$

Возьмём в направлении этого вектора точку M_1, отстоящую от точки M на расстоянии Δl, как это изображено на рис. 2.1. В этом случае разность $\Delta U(M) = U(M_1) - U(M)$ называется приращением поля в точке M в направлении $\vec{l}_0$.

Отношение $\dfrac{\Delta U}{\Delta l}$ называется средней скоростью изменения поля на отрезке Δl в направлении $\vec{l}_0$.

О п р е д е л е н и е. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{\partial U}{\partial l}$, то он называется *производной поля* $U = U(M)$ в точке M *по направлению* $\vec{l}_0$.

В этом случае символ $\frac{\partial U}{\partial l}$ обозначает производную скалярного поля по направлению и не трактуется как дробь.

Т е о р е м а. Если функция $U = U(M)$ дифференцируема в точке M по любому направлению $\vec{l}_0 = \vec{i}\cos(\alpha) + \vec{j}\cos(\beta) + \vec{k}\cos(\gamma)$, то

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(\beta) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(\gamma). \tag{2.2}$$

Производная скалярного поля по направлению показывает скорость возрастания скалярной функции в данной точке в заданном направлении.

П р и м е р 1. Найти уравнение поверхности равного уровня скалярного поля $U = 3\cdot\ln(x) + y + z^2$, проходящей через точку $M(1; 2; 3)$, а также производную в этой точке по направлению к точке $M_1(-1; 4; 2)$.

Решение. Уравнение поверхности равного уровня имеет вид: $U(x; y; z) = \text{const}$. Для отыскания константы подставим координаты заданной точки в функцию поля: $\text{const} = 3\cdot\ln(1) + (-2) + 3^2 = -2 + 9 = 7$. Таким образом, искомое уравнение поверхности равного уровня имеет вид: $3\cdot\ln(x) + y + z^2 = 7$.

Теперь вычислим производную в заданной точке по направлению. Для этого сначала найдём единичный вектор направления $\vec{l}_0 = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{|MM_1|}$:

$$\overrightarrow{MM_1} = (-1-1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-3)\vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k};$$

$$|MM_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3,$$

значит, $\vec{l}_0 = \frac{-2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}}{3} = -\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$,

следовательно, $\cos(\alpha) = -\frac{2}{3}$; $\cos(\beta) = -\frac{2}{3}$; $\cos(\gamma) = -\frac{1}{3}$.

Найдём частные производные скалярного поля в точке M:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial U}{\partial x}=\left(3\ln(x)+y+z^2\right)'_x=\dfrac{3}{x}\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=\left(3\ln(x)+y+z^2\right)'_y=1\\ \dfrac{\partial U}{\partial z}=\left(3\ln(x)+y+z^2\right)'_z=2z\\ \\ \end{array}\right|\begin{array}{l}=3;\\ =1;\\ =6;\\ M(1;2;3).\end{array}$$

В соответствии с формулой (2.2) найдём:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{14}{3}.$$

Ответ: Уравнение поверхности равного уровня, проходящей через точку M, имеет вид: $3\cdot\ln(x)+y+z^2=7$. Производная данного скалярного поля в точке M в направлении $\overrightarrow{MM_1}$ равна $-\dfrac{14}{3}$. Знак «минус» перед значением производной означает, что в данном направлении поле убывает.

3. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение. *Градиентом* скалярного поля $U = U(x;y;z)$ в точке M называется вектор

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U(M))=\frac{\partial U(M)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(M)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(M)}{\partial z}\vec{k}.$$

Стрелку над символом градиента можно не рисовать, так как он является вектором по определению.

Если вектор $\vec{l}_0=\vec{i}\cos(\alpha)+\vec{j}\cos(\beta)+\vec{k}\cos(\gamma)$ – единичный вектор некоторого направления, то производная по этому направлению

$$\left(\vec{l}_0,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U)\right)=\frac{\partial U}{\partial x}\cos(\alpha)+\frac{\partial U}{\partial y}\cos(\beta)+\frac{\partial U}{\partial z}\cos(\gamma) \qquad (3.1)$$

по определению скалярного произведения. Если известен угол φ между градиентом поля в точке M и направлением, в котором требуется найти производную, то её можно выразить иначе:

$$\left(\vec{l}_0, \overrightarrow{\mathrm{grad}}(U)\right) = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U)\right| \cdot \cos(\varphi) = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \cdot \cos(\varphi). \qquad (3.2)$$

Таким образом, производная по направлению является проекцией градиента на это направление, как показано на рис. 3.1. Из этого факта следует:

1) градиент является вектором, в направлении которого поле возрастает быстрее всего;

2) максимальная производная по направлению равна модулю градиента. Это случается, когда $\vec{l}_0 \parallel \overrightarrow{\mathrm{grad}}(U)$, следовательно, когда $\cos(\varphi) = 1$;

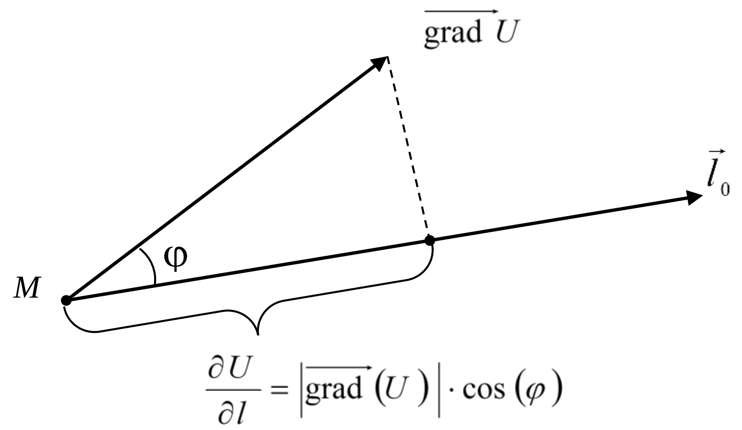

Рис. 3.1. Производная по направлению как проекция градиента

3) градиент есть вектор, перпендикулярный поверхности равного уровня (рис. 3.2);

4) производная по направлению, касательному поверхности равного уровня, равна нулю (см. рис. 3.2).

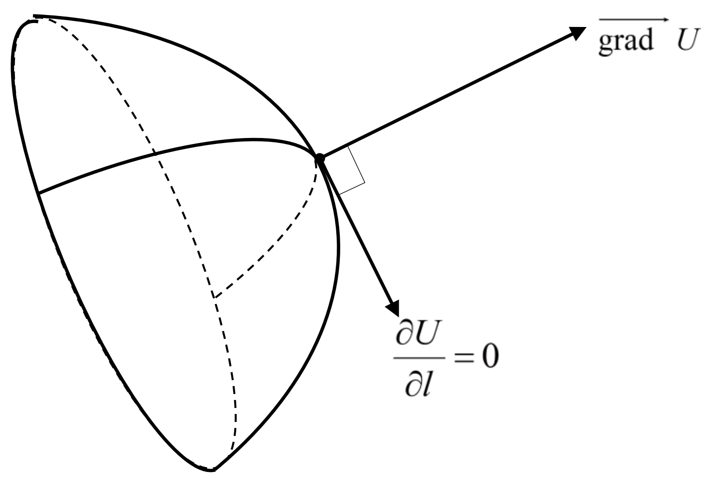

Рис. 3.2. Производная по направлению, перпендикулярному градиенту

Для удобства записи ирландцем Уильямом Гамильтоном был введён в математическую символику векторный дифференциальный оператор, который по сути является предписанием выполнения определённых действий со скалярной функцией. Этот оператор так и называется – оператор Гамильтона:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \qquad (3.3)$$

В частности, оператор Гамильтона предписывает нахождение частных производных скалярной функции поля по всем переменным, умножение каждой на соответствующий орт координатной оси и их сложение. Стрелку над символом данного оператора можно не рисовать, так как после его действия на скалярное поле получается вектор по определению – градиент. В устной речи этот оператор называют словом «нáбла» – от греческого слова, обозначающего арфу, – за внешнее сходство символа с этим музыкальным инструментом.

Поскольку оператор Гамильтона является дифференциальным, то свойства градиента аналогичны свойствам производной. Выпишем эти свойства двумя способами – обычным и с использованием оператора набла:

1) $\mathrm{grad}(C) = 0$, где скалярное поле $U(x; y; z) = C = \mathrm{const}$; ($\nabla C = 0$);

2) $\mathrm{grad}(C \cdot U) = C \cdot \mathrm{grad}(U)$, где $C = \mathrm{const}$; ($\nabla CU = C\nabla U$);

3) $\mathrm{grad}(U_1+U_2) = \mathrm{grad}(U_1) + \mathrm{grad}(U_2)$, где $U_1 = U(x; y; z)$ и $U_2 = U(x; y; z)$ – скалярные поля; ($\nabla(U_1+U_2) = \nabla U_1+\nabla U_2$);

4) $\mathrm{grad}(U_1 \cdot U_2) = U_2 \cdot \mathrm{grad}(U_1)+ U_1 \cdot \mathrm{grad}(U_2)$; ($\nabla(U_1 \cdot U_2) = U_2 \cdot \nabla U_1+ U_1 \cdot \nabla U_2$);

5) $\mathrm{grad}(U(\varphi)) = u'_\varphi \cdot \mathrm{grad}(\varphi)$, где φ – промежуточный аргумент скалярной функции поля; ($\nabla(U(\varphi)) = =u'_\varphi \cdot \nabla\varphi$).

4. ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Определение. *Векторным полем* называется область n-мерного пространства, каждой точке которого ставится в соответствие вектор $\vec{a}(M)$.

Заметим, что пространство, занимаемое векторным полем, и векторы, соответствующие его точкам, могут быть любой размерности. Однако чаще всего рассматриваются трёхмерные поля, в которых точкам трёхмерного пространства соответствуют трёхмерные же векторы. Примерами векторных полей являются электрические и магнитные поля, поле силы тяжести, океанические течения, ветры и т. д.

В трёхмерной декартовой системе координат в зависимости от выбранных обозначений векторное поле обычно имеет вид:

$$\vec{a}(M) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$$

или

$$\vec{a}(M) = a_x(x;y;z)\vec{i} + a_y(x;y;z)\vec{j} + a_z(x;y;z)\vec{k},$$

где $P(x;\,y;\,z) = a_x(x;\,y;\,z)$, $Q(x;\,y;\,z) = a_y(x;\,y;\,z)$, $R(x;\,y;\,z) = a_z(x;\,y;\,z)$ – функции трёх переменных, которые мы будем далее полагать непрерывными вместе со своими частными производными.

Векторные поля часто изображаются с помощью векторных линий.

Определение. *Векторной линией* поля называют такую линию, в каждой точке которой касательная совпадает с вектором, соответствующим этой точке (рис. 4.1).

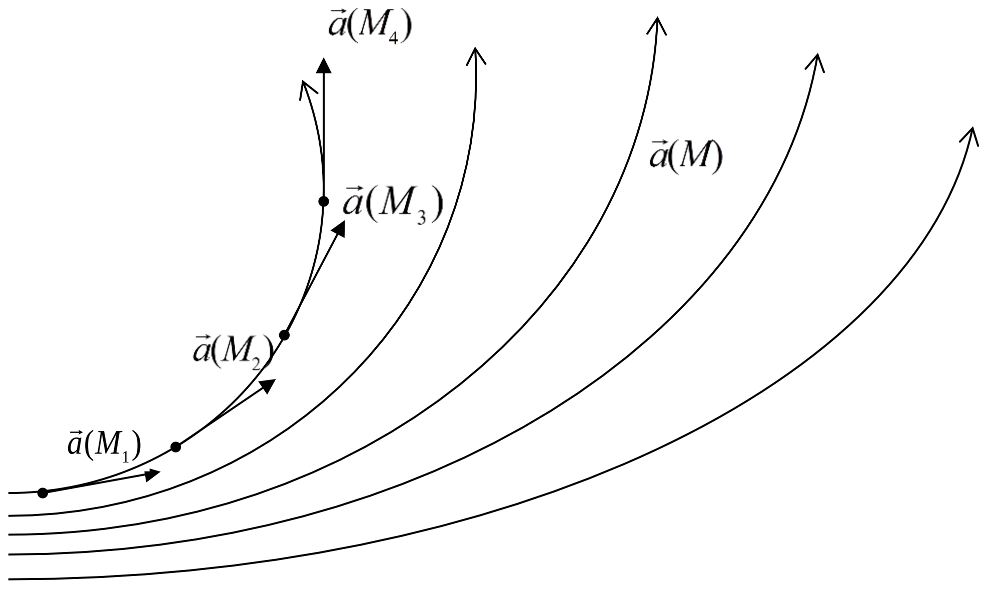

Рис. 4.1. Векторные линии поля $\vec{a}(M)$

Из определения векторной линии следует, что в некоторой точке пространства вектор поля $\vec{a}(M) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ и вектор касательной к ней $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ должны быть коллинеарными. Условием коллинеарности является пропорциональность их проекций:

$$\frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)}. \tag{4.1}$$

Решением системы дифференциальных уравнений (4.1) является семейство векторных линий поля.

Для простоты рассмотрим пример нахождения уравнения векторной линии плоского векторного поля.

Пример 2. Найти уравнение векторной линии поля $\vec{a}(M) = 2y\vec{i} - 3x\vec{j}$, проходящей через точку A(–4; 5).

Решение. Семейство векторных линий данного векторного поля найдётся из дифференциального уравнения (4.1):

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-3x}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int 3x dx = -\int 2y dy,$$

после чего приходим к уравнению

$$\frac{3}{2}x^2 = -y^2 + C,$$

которое описывает семейство эллипсов $3x^2 + 2y^2 = C$. Константа C найдётся из условия прохождения линии через точку A(–4; 5). Подставляя её координаты в уравнение семейства эллипсов, окончательно получаем уравнение векторной линии: $3x^2 + 2y^2 = 98$.

Ответ: Векторной линией данного поля, проходящей через заданную точку, является эллипс $3x^2 + 2y^2 = 98$.

Для решения многих задач естествознания связанных с вычислением количества перемещённого вещества или энергии, в теории поля разработан соответствующий математический аппарат, в котором ключевым является понятие потока векторного поля. Потоком векторного поля является поверхностный интеграл, и, как любой другой интеграл, он является пределом интегральной суммы. Кратко рассмотрим эту сумму и её предел.

Пусть двухсторонняя поверхность S находится в векторном поле $\vec{a}(M)$. Поверхность произвольным образом разбивается на k отдельных площадок ΔS_i, на каждой такой площадке выбирается произвольная точка τ_i, в этой точке находится значение векторного поля и орт нормали к поверхности (рис. 4.2). Составляется сумма скалярных произведений:

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{a}(\tau_i), \vec{n}(\tau_i)\right) \Delta S_i. \tag{4.2}$$

При этом если существует предел такой суммы при стягивании всех площадок ΔS_i к точкам τ_i и он не зависит ни от способа разбиения поверхности S, ни от выбора точек τ_i на каждой площадке, то он называется потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность S и обозначается поверхностным интегралом 1-го рода:

$$\Pi = \lim_{\max D(\Delta S)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{a}(\tau_i), \vec{n}(\tau_i)\right) \Delta S_i = \iint_S \left(\vec{a}(M), d\vec{S}\right), \tag{4.3}$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0$.

Так как $\vec{n}_0 = \vec{i}\cos(\alpha) + \vec{j}\cos(\beta) + \vec{k}\cos(\gamma)$, то поток можно выразить следующим образом:

$$\Pi = \iint_S \left(\vec{a}(M), d\vec{S}\right) = \iint_S \left(P(x;y;z)\cos(\alpha) + Q(x;y;z)\cos(\beta) + R(x;y;z)\cos(\gamma)\right) dS. \tag{4.4}$$

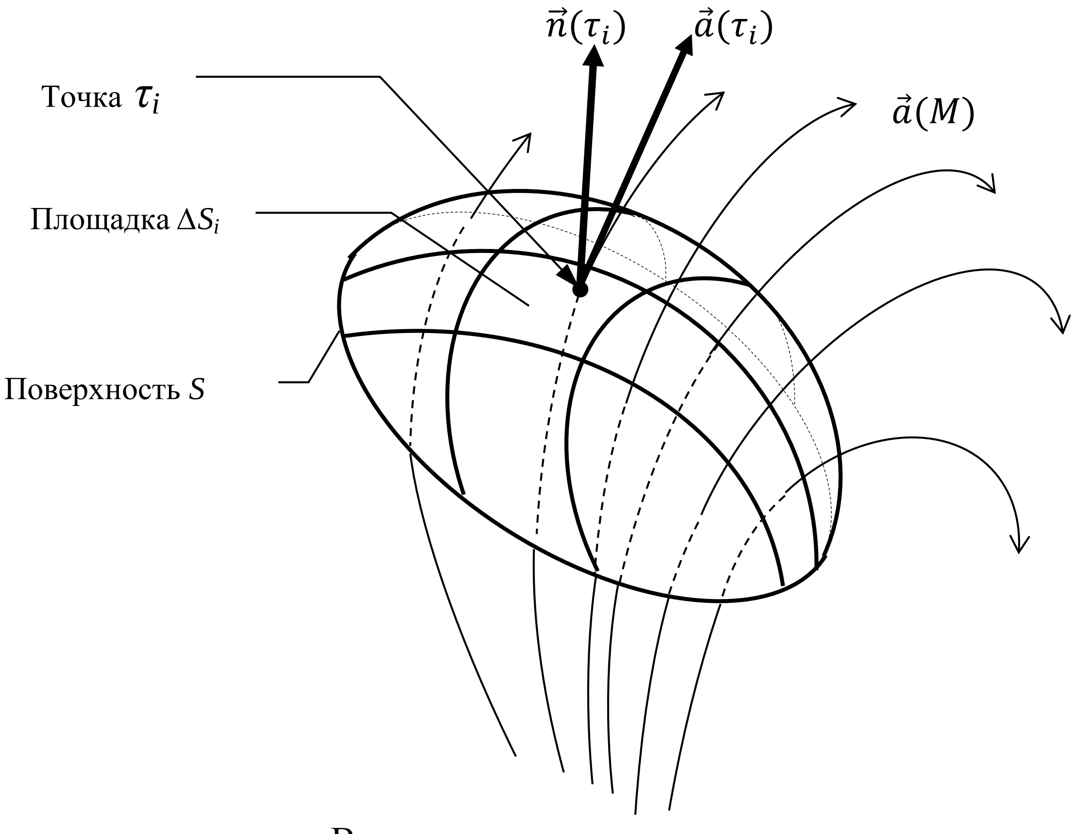

Рис. 4.2. Поток векторного поля через поверхность S

Одним из способов вычисления потока векторного поля является метод проецирования на одну из координатных плоскостей.

Этот метод удобен, если поверхность S однозначно проецируется на какую-нибудь плоскость, например, на xOy (рис. 4.3). В этом случае уравнение поверхности S представимо в виде $z = z(x; y)$ в явной форме, а поток

$$\Pi = \iint_S \left(\vec{a}, d\vec{S}\right) = \iint_G \left(\vec{a}, \vec{n}_0\right)\Big|_{z=z(x;y)} \cdot \sqrt{(z_x')^2 + (z_y')^2 + 1}\, dxdy\,, \tag{4.5}$$

где G – область на плоскости xOy, в которую проецируется поверхность S.

Если же поверхность S однозначно проецируется на xOz, то уравнение поверхности S может быть представлено в виде $y = y(x;z)$, а поток

$$\Pi = \iint_S \left(\vec{a}, d\vec{S}\right) = \iint_H \left(\vec{a}, \vec{n}_0\right)\Big|_{y=y(x;z)} \cdot \sqrt{(y_x')^2 + 1 + (y_z')^2}\, dxdz, \tag{4.6}$$

где H – область на плоскости xOz, в которую проецируется поверхность S.

Предлагаем самостоятельно выписать двойной интеграл для вычисления потока векторного поля, если поверхность S однозначно проецируется на yOz.

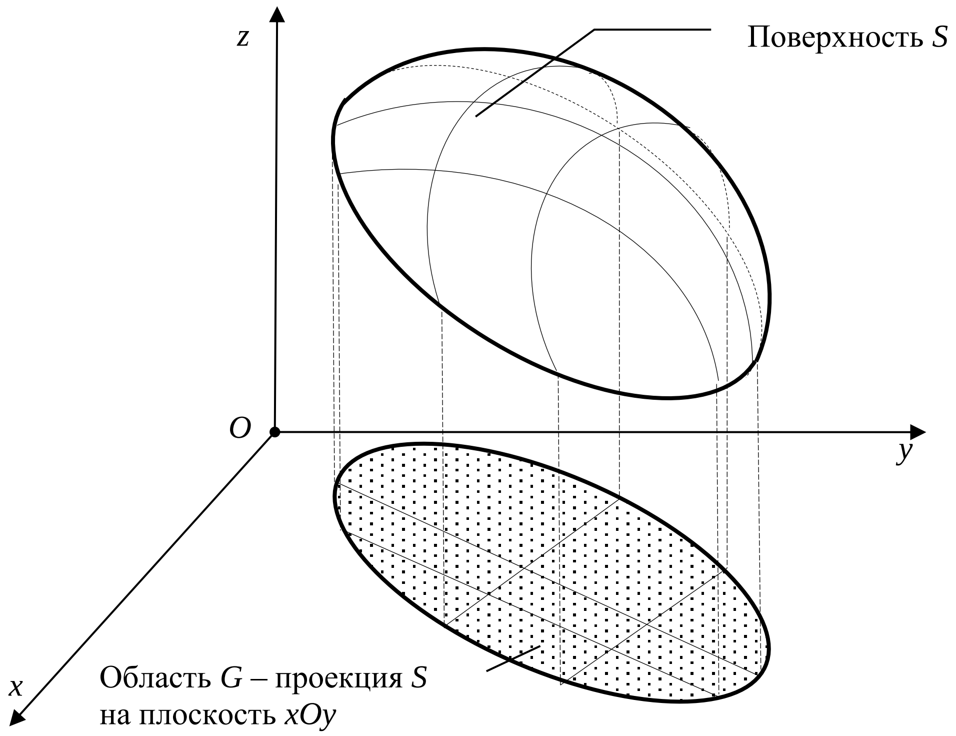

Рис. 4.3. Проецирование на одну из координатных плоскостей

П р и м е р 3. Найти поток векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$ через часть плоскости $2x + y + z = 2$, лежащую в первом октанте в направлении, образующем острый угол с осью Oz.

Решение. Для вычисления потока нам потребуется орт нормали к поверхности. Нормальный вектор к плоскости найдётся из её уравнения: $\vec{n} = \pm(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. Нужно выбрать знак «+» перед нормалью, так как в этом случае проекция нормали на ось *Oz* будет положительна, как показано на рис. 4.4. Модуль нормального вектора определяется по теореме Пифагора:

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6},$$

а значит, орт нормали

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

Поверхность *S* такова, что её можно однозначно спроецировать на любую координатную плоскость, например на *xOy* (см. рис. 4.4): $z = 2 - 2x - y$.

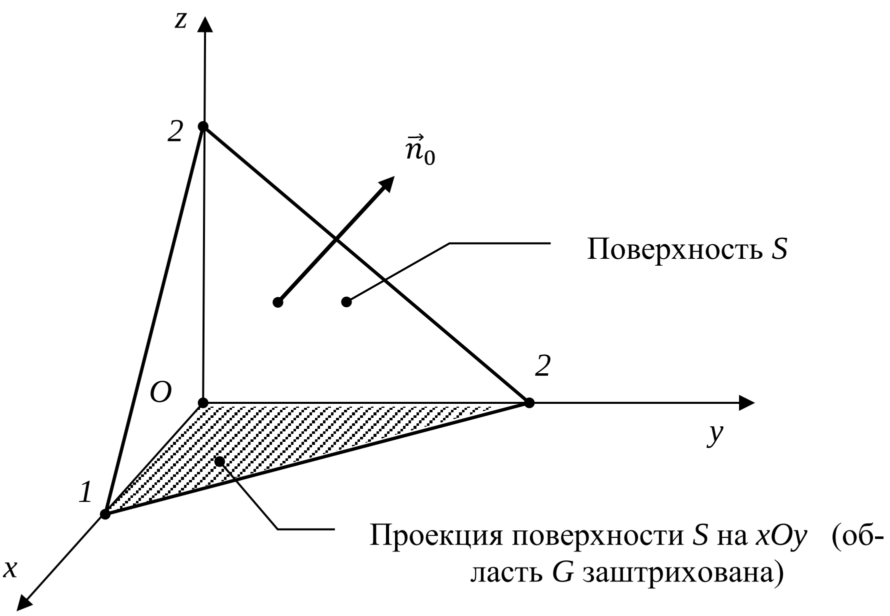

Рис. 4.4. Поток векторного поля через часть плоскости в первом октанте

Вычислим поток:

$$\Pi = \iint_G \left(xy\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}, \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)\right)\Bigg|_{z=2-2x-y} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1}\, dxdy =$$

$$= \iint_G \left(2xy + y + x + 3(2 - 2x - y)\right) dxdy.$$

Далее, приводя подобные и расставляя пределы интегрирования для области *G*, получим:

$$\varPi = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2xy - 5x - 2y + 6)\, dy = \frac{10}{3}.$$

Ответ: Поток векторного поля равен $\frac{10}{3}$.

Пример 4. Найти поток напряжённости электрического поля точечного заряда Q через круг радиусом R, если плоскость круга перпендикулярна радиусу-вектору, проведённому в его центр, и находится на расстоянии r. Рассмотреть два случая – когда неограниченно возрастает расстояние до круга и когда неограниченно растёт его радиус.

Решение. Для этого случая $\varPi = \iint\limits_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \iint\limits_S (\vec{E}, \vec{n}_0) dS,$

где $\vec{E}$ – вектор напряжённости электростатического поля, вектор $\vec{n}_0$ – орт оси Oz, т. е. $\vec{n}_0 \equiv \vec{k}.$

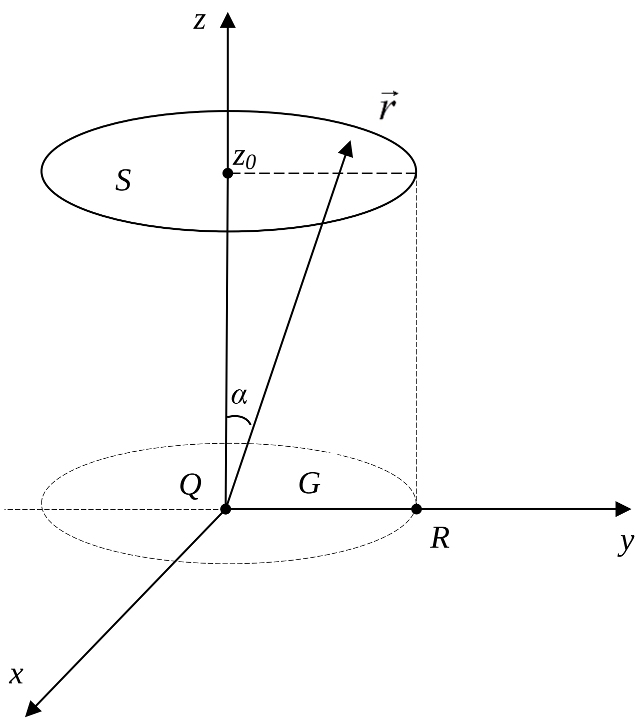

Рис. 4.5. Поток векторного поля через круг S

Скалярное произведение $(\vec{E}, \vec{k}) = |E|\cos(\alpha)$, где α – угол между векторами $\vec{k}$ и $\vec{E}$, как показано на рис. 4.5.

В данном случае удобно перейти к цилиндрическим координатам, тогда в гауссовой системе единиц

$$E = \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{Q}{\rho^2 + z^2}.$$

Таким образом, поток

$$\varPi = \iint\limits_S \frac{Q}{\rho^2 + z^2} \cos(\alpha) dS.$$

Для вычисления этого интеграла используем метод проецирования на одну из координатных плоскостей, например, на полярную плоскость $O\varphi\rho$:

$$\varPi = \iint\limits_G \frac{Q}{\rho^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\Bigg|_{z=z_0} \cdot \sqrt{z_z'^2 + \varphi_z'^2 + \rho_z'^2}\, d\varphi\rho d\rho =$$

$$=\iint\limits_G \frac{Q}{\rho^2+z_0^2}\cdot\frac{z_0}{\sqrt{\rho^2+z_0^2}}\cdot\sqrt{1+0+0}\,d\varphi\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{Q\cdot z_0}{\left(\rho^2+z_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}\rho d\rho.$$

Подводя под знак дифференциала промежуточный аргумент во внутреннем интеграле и интегрируя внешний, в силу независимости внешнего и внутреннего интеграла получим:

$$2\pi\cdot Q\cdot z_0\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^R\left(\rho^2+z_0^2\right)^{-\frac{3}{2}}d\left(\rho^2+z_0^2\right)=\pi\cdot Q\cdot z_0\left(\rho^2+z_0^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{1}\right)\Bigg|_0^R=$$

$$=-2\pi\cdot Q\cdot z_0\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}}-\frac{1}{\sqrt{0+z_0^2}}\right)=2\pi\cdot Q\cdot\left(1-\sqrt{\frac{z_0^2}{R^2+z_0^2}}\right).$$

Ответ: Поток векторного поля равен $2\pi\cdot Q\cdot\left(1-\sqrt{\frac{z_0^2}{R^2+z_0^2}}\right).$

В случае, если удалять круг,

$\lim\limits_{z_0\to\infty}\Pi=2\pi Q\cdot(1-1)=0$ – поток стремится к нулю.

В случае, если увеличивать радиус круга,

$\lim\limits_{R\to\infty}\Pi=2\pi Q\cdot(1-0)=2\pi Q$ – поток стремится к $2\pi Q$.

5. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ЗАМКНУТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

Во многих задачах естествознания требуется найти поток векторного поля через замкнутую поверхность ограниченного в пространстве тела. В этом случае можно разбить поверхность на отдельные участки, вычислить потоки через каждый из них и сложить результаты. Например, поверхность пирамиды можно разбить на поверхности отдельных её граней, сферу – на две полусферы, цилиндр – на боковую поверхность и на поверхности «верхнего» и «нижнего» дна и т. д. Поток обычно вычисляется «исходящий», т. е. «из-под» поверхности «наружу», для чего нормаль к поверхности выбирается «внешняя».

Однако существует способ найти такой поток по-другому и, часто, это получается гораздо быстрее. Речь идёт о формуле Остроградского – Гаусса, которая связывает двойной интеграл по замкнутой поверхности и тройной интеграл по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Если векторное поле $\vec{a}(M) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ таково, что функции $P(x;\ y;\ z)$, $Q(x;\ y;\ z)$, $R(x;\ y;\ z)$ непрерывны вместе со своими частными производными, а пространственная область V простая, гладкая или кусочно-гладкая, $z = z_1(x;\ y)$ и $z = z_2(x;\ y)$ – уравнения «нижней» и «верхней» частей поверхности S и они непрерывны, как изображено на рис. 5.1, то

$$\oiint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \tag{5.1}$$

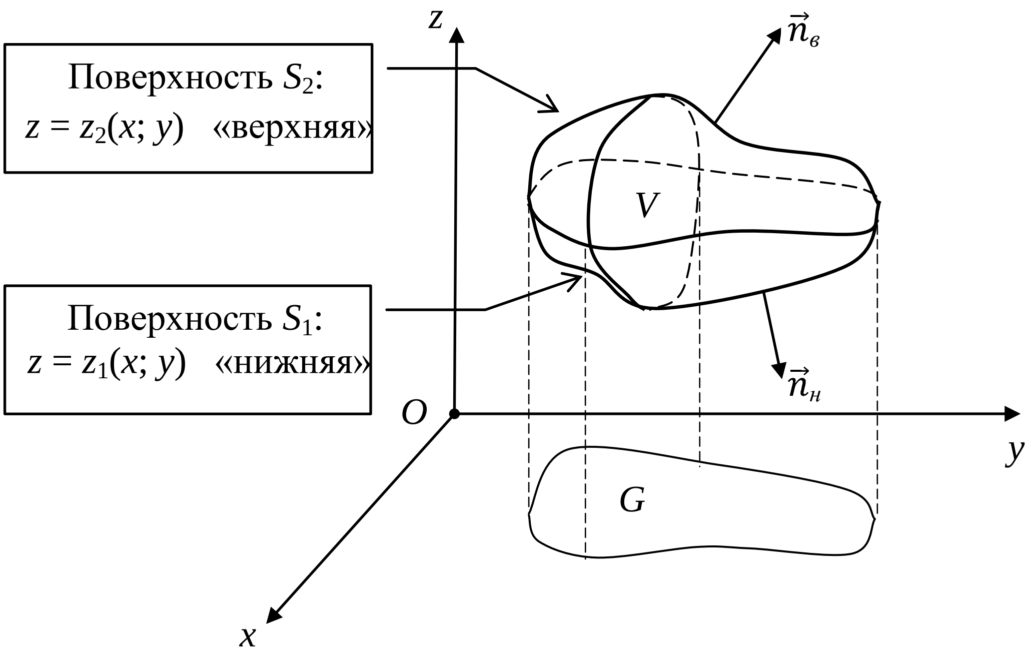

Рис. 5.1. Разбиение замкнутой поверхности на две части

Обе части формулы (5.1) выражают поток $П$ векторного поля через замкнутую поверхность S. Возможны три варианта:

– $П = 0$, в этом случае поток векторного поля, проникший «внутрь» области V, равен потоку, вышедшему «из-под» неё. Это означает, что внутри области V не существует источников или стоков поля либо они скомпенсированы;

– $П > 0$ – источники поля внутри области V преобладают над стоками;

– $П < 0$ – стоки поля внутри области V преобладают над источниками.

Подынтегральная функция тройного интеграла в формуле Остроградского – Гаусса является дивергенцией векторного поля.

О п р е д е л е н и е. *Дивергенцией* векторного поля называется предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность S к объёму, ограниченному этой поверхностью, если поверхность стягивать в точку:

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V}=\operatorname{div}\vec{a}(M). \tag{5.2}$$

Дивергенция поля является скаляром, иначе её иногда называют расходимостью поля в данной точке M. Вычислить дивергенцию можно по формуле:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}. \tag{5.3}$$

Теперь формулу Остроградского – Гаусса можно записать в более компактном виде:

$$\Pi=\oiint_S\left(\vec{a}(M),d\vec{S}\right)=\iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV. \tag{5.4}$$

Дивергенцию можно записать и с помощью оператора Гамильтона

$$\operatorname{div}\vec{a}=\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)$$

как «скалярное произведение» оператора набла на векторное поле. Кавычки здесь из-за того, что данный дифференциальный оператор, строго говоря, вектором не является, но мы обращаемся с ним в этом случае как с вектором.

Поскольку, как уже отмечалось, оператор Гамильтона является дифференциальным, то и свойства дивергенции аналогичны свойствам производной. Выпишем эти свойства двумя способами – обычным и с использованием оператора набла:

1) $\operatorname{div}\left(C\cdot\vec{a}\right)=C\cdot\operatorname{div}\vec{a}$, где C = const; $\left(\vec{\nabla},C\cdot\vec{a}\right)=C\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)$;

2) $\operatorname{div}\left(\vec{a}_1\pm\vec{a}_2\right)=\operatorname{div}\vec{a}_1\pm\operatorname{div}\vec{a}_2$; $\left(\vec{\nabla},\left(\vec{a}_1\pm\vec{a}_2\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\vec{a}_1\right)\pm\left(\vec{\nabla},\vec{a}_2\right)$;

3) $\operatorname{div}\left(U\cdot\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\operatorname{grad}U\right)+U\cdot\operatorname{div}\vec{a}$, где $U=U(x;\,y;\,z)$ – скалярное поле; $\left(\vec{\nabla},U\cdot\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\vec{\nabla}U\right)+U\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{a}\right)$.

П р и м е р 5. Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (5x-2y+4z)\vec{i} + (x-3y-8z)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$$

через всю поверхность треугольной пирамиды, образованную координатными плоскостями и плоскостью $2x + y + 3z = 12$, нормаль выбрать внешнюю.

Решение. Воспользуемся формулой Остроградского – Гаусса для внешней нормали и найдём поток через поверхность пирамиды как тройной интеграл от дивергенции по всему объёму ограниченному данной поверхностью тела:

$$\Pi = \iiint\limits_V \operatorname{div}(\vec{a})\, dV,$$

для этого найдём сначала дивергенцию по формуле (5.3):

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial(5x-2y+4z)}{\partial x} + \frac{\partial(x-3y-8z)}{\partial y} + \frac{\partial(x+2z)}{\partial z} = 5-3+2=4.$$

Таким образом, поток $\Pi = \iiint\limits_V 4 \cdot dV = 4 \cdot \iiint\limits_V dV = 4 \cdot V$ будет численно равен учетверённому объёму данной пирамиды. Объём, в свою очередь, найдётся как треть произведения площади основания на высоту (рис. 5.2):

$$\Pi = 4 \cdot V = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4 = 192.$$

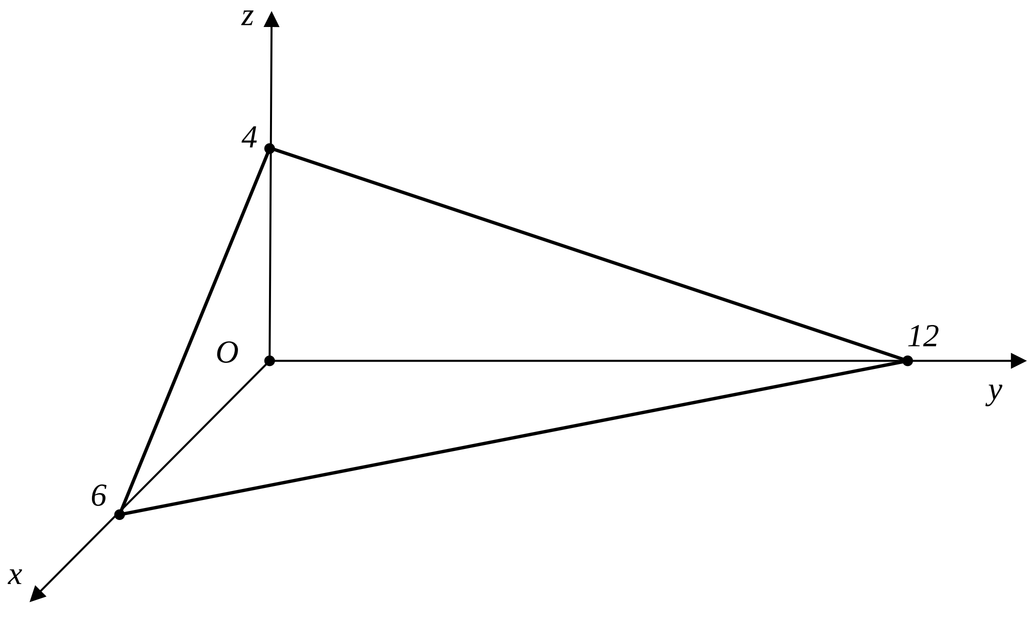

Рис. 5.2. Треугольная пирамида

Ответ: поток данного векторного поля через всю поверхность пирамиды изнутри наружу равен 192.

П р и м е р 6. Найти поток векторного поля $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность, образованную координатными плоскостями и частью поверхности параболоида вращения $x^2 + y^2 = 4 - z$, находящейся в первом октанте (рис. 5.3). Нормаль выбрать внешнюю.

Решение. Воспользуемся формулой Остроградского – Гаусса и найдём поток через данную поверхность как тройной интеграл от дивергенции:

$$\varPi = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\, dV,$$

для этого вычислим дивергенцию:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = y^2 + x^2 + 1.$$

Таким образом, найдём поток

$$\varPi = \iiint_V (x^2 + y^2 + 1)\, dV.$$

Переходя к полярным координатам, заменяя $x^2 + y^2 = \rho^2$ и $dV = \rho{\cdot}d\rho{\cdot}d\varphi{\cdot}dz$, приходим к тройному интегралу:

$$\varPi = \iiint_V (\rho^2 + 1)dV.$$

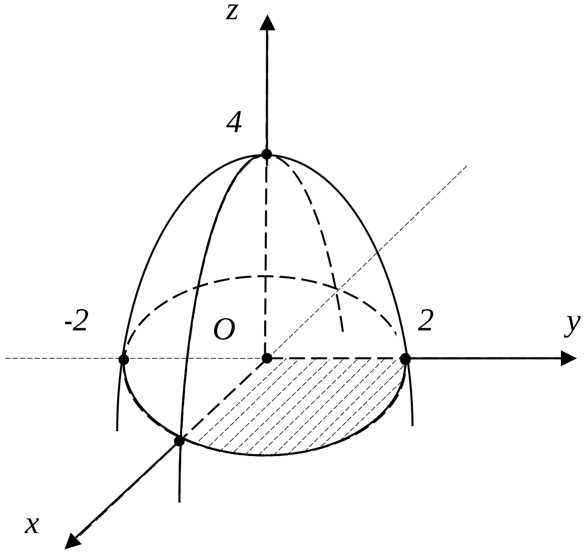

Рис. 5.3. Поверхность параболоида

Выбирая внутренней переменной интегрирования аппликату, получим:

$$\varPi = \iint_G \rho d\rho d\varphi \int_0^{4-\rho^2} (\rho^2 + 1)dz = \iint_G (\rho^2 + 1)(4 - \rho^2)\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \left(-\rho^5 + 3\rho^3 + 4\rho\right)d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\rho^6}{6} + \frac{3\rho^4}{4} + 2\rho^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{14\pi}{3}.$$

Ответ: Учитывая, что формула Остроградского – Гаусса для внешней нормали, поток векторного поля через данную поверхность равен $+\dfrac{14\pi}{3}$.

6. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Ещё одной важнейшей характеристикой векторного поля является циркуляция. Для пояснения физического смысла циркуляции можно привести, например, следующую аналогию. Внутри жидкости, имеющей внутренние течения, тело прошло по определённой траектории. Течения внутри жидкости могли помогать этому движению, препятствовать ему или иметь скомпенсированное действие на движение этого тела. В первом случае можно говорить о положительной циркуляции, во втором – об отрицательной и в третьем – о нулевой. Количественное значение циркуляции в этом случае определится приращением (или потерей) кинетической энергии в некоторой заданной системе единиц. Чаще всего циркуляция интерпретируется как работа силового поля. Очевидно, что циркуляция будет зависеть как от формы контура, так и от его ориентации в векторном поле.

Циркуляция векторного поля вычисляется как криволинейный интеграл, и, как любой другой интеграл, он является пределом интегральной суммы. Кратко рассмотрим эту сумму и её предел.

Пусть в векторное поле $\vec{a}(M)$ помещён контур L (рис. 6.1), который произвольным образом разбит на n отдельных дуг Δl_i. На каждой дуге выбирается произвольная точка τ_i, в которой находится значение векторного поля $\vec{a}(\tau_i)$.

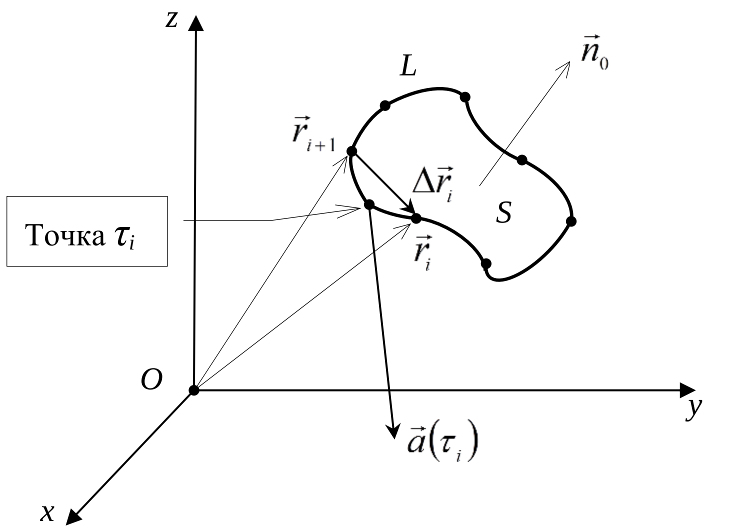

Рис. 6.1. Контур в векторном поле, по которому вычисляется циркуляция

Составляем сумму скалярных произведений:

$$Ц_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{a}(\tau_i), \Delta\vec{r}_i\right). \tag{6.1}$$

Определение. Если существует предел такой суммы, при стягивании всех хорд Δr_i к точкам τ_i, и он не зависит ни от способа разбиения контура L, ни от выбора точек τ_i на каждой дуге, то он называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру L.

По аналогии с другими интегральными суммами циркуляцию записывают с помощью криволинейного интеграла по замкнутому контуру:

$$Ц = \lim_{\max \Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{a}(\tau_i), \Delta\vec{r}_i\right) = \oint_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right), \tag{6.2}$$

здесь $d\vec{r}$ по смыслу является «элементарной хордой», поэтому для удобства будем обозначать её символом $d\vec{l}$. Таким образом, далее мы будем записывать циркуляцию в виде интеграла первого рода

$$Ц = \oint_L \left(\vec{a}, d\vec{l}\right) \tag{6.3}$$

или второго:

$$Ц = \oint_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz. \tag{6.4}$$

Подынтегральное выражение по определению скалярного произведения может быть представлено в виде:

$$(\vec{a}, d\vec{l}) = |\vec{a}| \cdot |d\vec{l}| \cdot \cos\varphi = a_l \cdot dl,$$

где a_l – проекция вектора поля в заданной точке на касательную к контуру (рис. 6.2). Проекция будет менять знак, если менять направление обхода контура.

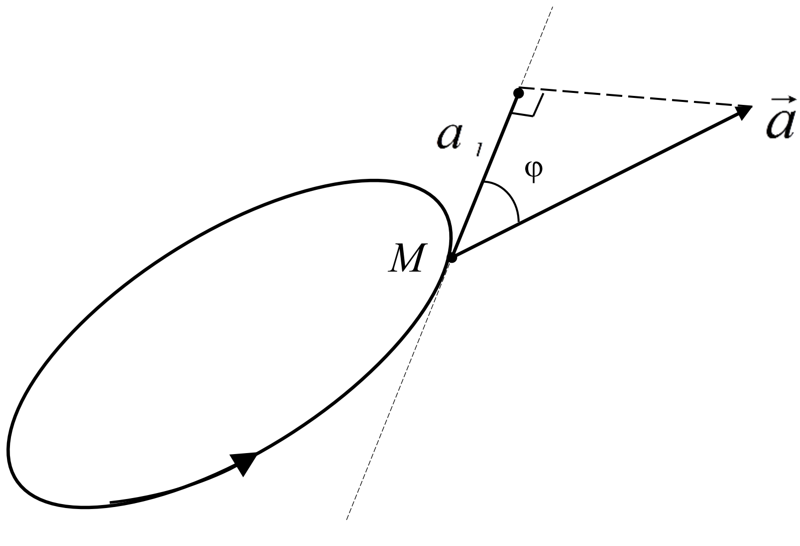

Рис. 6.2. Проекция вектора поля на касательную к контуру

Работа силового поля по перемещению тела может совершаться и в том случае, если траектория движения тела не замкнута. В этом случае её вычисляют как криволинейный интеграл по данной траектории и также иногда называют циркуляцией.

Пример 7. В силовом поле $\vec{F}=(x^2+3z)\vec{i}+(xy+z)\vec{j}+(y^2-z)\vec{k}$ тело перемещено из точки A(1; 0; 0) в точку B(1; 2; 4) по дуге параболы $z = y^2$ в плоскости $x = 1$. Вычислить работу силового поля.

Решение. Работа силового поля может быть записана интегралом второго рода как циркуляция по дуге:

$$Ц_{\overset{\smile}{\mathrm{AB}}} = \int\limits_{\overset{\smile}{\mathrm{AB}}} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz. \qquad (6.5)$$

Адаптируя интеграл к условиям задачи, запишем

$$Ц_{\overset{\smile}{\mathrm{AB}}} = \int\limits_{\overset{\smile}{\mathrm{AB}}} (x^2+3z)dx + (xy+z)dy + (y^2-z)dz,$$

оставляя в подынтегральном выражении одну переменную, например y, и имея в виду, что $x = 1$, а следовательно, $dx = 0$, получим для циркуляции:

$$Ц_{\overset{\smile}{\mathrm{AB}}} = \int\limits_0^2 0+(y+y^2)dy+(y^2-y^2)d\left(y^2\right) = \int\limits_0^2 (y+y^2)dy = \left.\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right|_0^2 = 2+\frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Ответ: Работа данного силового поля по заданной траектории равна $\frac{14}{3}$.

В случае если контур замкнут, его можно разбить на отдельные участки.

Пример 8. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=5y\vec{i}+2z\vec{j}-4y\vec{k}$ по треугольнику ABC, вершины которого лежат на координатных осях: A(–3; 0; 0), B(0; –4; 0), C(0; 0; 7).

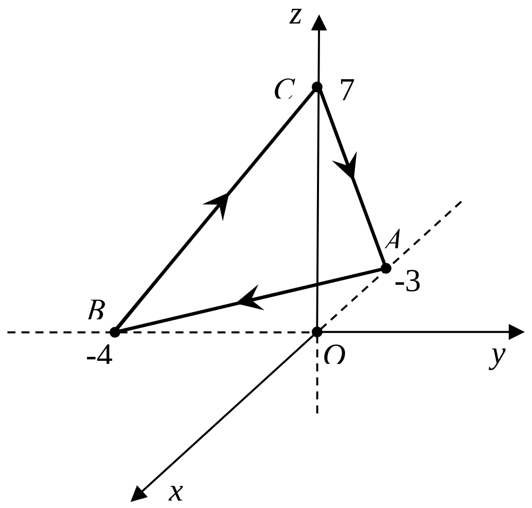

Рис. 6.3. Обход по треугольнику

Решение. Циркуляция векторного поля может быть записана интегралом как первого, так и второго рода.

В данном случае удобно воспользоваться записью циркуляции интегралом второго рода:

$$Ц_{\Delta ABC} = \oint\limits_{ABCA} 5ydx + 2zdy - 4ydz.$$

По свойствам криволинейного интеграла путь интегрирования (а значит, и интеграл) может быть разбит на три части: ∪ABCA = ∪AB + ∪BC + ∪CA (рис. 6.3). Путь интегрирования здесь обозначен символом «дуга» для общности рассмотрения. В данном конкретном случае участки интегрирования являются сторонами треугольника, т. е. отрезками. Мы можем отдельно вычислить циркуляцию по каждой стороне треугольника по формуле (6.4), а потом сложить результаты.

Вычислим циркуляцию по стороне AB:

$$Ц_{AB} = \int_{AB} 5ydx + 2zdy - 4ydz.$$

Так как отрезок AB лежит в плоскости *xOy*, приравняем *z* к нулю, тогда под интегралом останется только первое слагаемое:

$$Ц_{AB} = \int_{AB} 5ydx\ .$$

Сторона, по которой производится интегрирование, лежит на прямой, уравнение которой удобно записать «в отрезках»:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} = 1,$$

откуда можно выразить либо x, либо y и подставить в интеграл. Выразим, к примеру, $y = -\frac{4}{3}x - 4$, учитывая, что x на отрезке AB изменяется от -3 до нуля (см. рис. 6.3), можем составить интеграл для циркуляции:

$$Ц_{AB} = \int_{-3}^{0} 5 \cdot \left(-\frac{4}{3}x - 4 \right) dx = 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2 - 4x \right) \Bigg|_{-3}^{0} =$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 \right) - 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) \right) = -30.$$

Теперь вычислим циркуляцию по стороне BC:

$$Ц_{BC} = \int_{BC} 5ydx + 2zdy - 4ydz.$$

Учитывая, что отрезок BC лежит в плоскости *yOz*, приравняем *x* к нулю, тогда под интегралом останутся только второе и третье слагаемые:

$$Ц_{BC} = \int_{BC} 2zdy - 4ydz.$$

Сторона, по которой производится интегрирование, лежит на прямой:

$$\frac{y}{-4}+\frac{z}{7}=1,$$

откуда вновь выразим одну из переменных и подставим в интеграл. Выразим, к примеру, $z=\frac{7}{4}y+7,$ а учитывая, что переменная y на стороне BC изменяется от –4 до нуля (см. рис. 6.3), составим интеграл для циркуляции:

$$Ц_{BC}=\int_{-4}^{0}2\left(\frac{7}{4}y+7\right)dy-4yd\left(\frac{7}{4}y+7\right)=\int_{-4}^{0}\left(\frac{7}{2}y+14\right)dy-4\cdot\frac{7}{4}ydy=$$

$$=\int_{-4}^{0}\left(-\frac{7}{2}y+14\right)dy=\left(-\frac{7}{4}y^2+14y\right)\bigg|_{-4}^{0}=0-\left(-\frac{7}{4}\cdot(-4)^2+14\cdot(-4)\right)=84.$$

Наконец, вычислим циркуляцию по последней стороне – CA:

$$Ц_{CA}=\int_{CA}5ydx+2zdy-4ydz.$$

Учитывая, что сторона CA лежит в плоскости xOz, приравняем y к нулю, тогда под интегралом все слагаемые обнулятся, так как каждое содержит y. Это означает, что $Ц_{CA}=0.$ Теперь, сложив циркуляции по всем трём сторонам, получим циркуляцию по всему треугольнику:

$$Ц_{ABCA}=-30+\ 84\ +0=\ 54.$$

Ответ: Циркуляция векторного поля по данному треугольнику равна 54.

7. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. СВОЙСТВА РОТОРА. ФОРМУЛА СТОКСА

Определение. *Средней завихрённостью* векторного поля $\vec{a}(M)$ вокруг оси, перпендикулярной плоскому контуру L, называется отношение циркуляции по контуру L к площади фигуры S, ограниченной этим контуром.

Определение. *Завихрённостью*, или *плотностью циркуляции*, векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M_0 называется предел средней завихрённости при стягивании контура L к точке M_0 вокруг направления нормали к плоскости контура $\vec{n}$, т. е.

$$\lim_{L\to M_0}\frac{Ц}{S}=\frac{1}{S}\lim_{L\to M_0}\oint_L(\vec{a},d\vec{l})=w_{\vec{n}}(M_0). \qquad (7.1)$$

Очевидно, что если плотность циркуляции в одной и той же точке зависит от ориентации контура, то существует такое направления нормали, при котором плотность циркуляции будет максимальной. Заметим, что в этом случае плотность циркуляции в точке M_0 в направлении нормали $\vec{n}$, будет равна проекции максимальной плотности циркуляции на это направление:

$$\text{Пр} \max w(M_0) = w_{\vec{n}}(M_0). \tag{7.2}$$

Отметим аналогию с градиентом и производной по направлению скалярного поля:

$$\text{Пр}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ U(M_0) = \frac{\partial U(M_0)}{\partial l}.$$

Как максимальная производная по направлению в скалярном поле имеет своё название «градиент», так и вектор максимальной плотности циркуляции векторного поля был назван отдельным термином «ротор».

О п р е д е л е н и е. *Ротором* векторного поля в точке M_0 называется вектор максимальной плотности циркуляции данного поля в этой точке. Ротор обозначают символом

$$\text{rot}\,\vec{a}(M_0).$$

Если векторное поле $\vec{a} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$, то ротор вычисляют по следующему правилу:

$$\text{rot}\,\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{7.3}$$

Удобнее всего запомнить этот способ вычисления ротора с помощью псевдоопределителя

$$\text{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{7.4}$$

или записать с помощью оператора Гамильтона: $\text{rot}\ \vec{a} = [\vec{\nabla}, \vec{a}]$.

Основные свойства ротора напоминают свойства производной, так как ротор так же, как градиент и дивергенция, является дифференциальным оператором:

– $\text{rot}\,\vec{C} = 0,\ \vec{C} = \text{const};$

– $\operatorname{rot} C\cdot\vec{a} = C\cdot\operatorname{rot}\vec{a},\quad C=\text{const};$

– $\operatorname{rot}\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)=\operatorname{rot}\vec{a}_1+\operatorname{rot}\vec{a}_2;$

– $\operatorname{rot}\left(U\cdot\vec{a}\right)=-\left[\vec{a},\operatorname{grad}U\right]+U\cdot\operatorname{rot}\vec{a}$, где $U = U(x;\, y;\, z)$.

Пример 9. Найти плотность циркуляции поля $\vec{a}=(x+y^2)\vec{i}+xy\vec{j}+(z-2x)\vec{k}$ в точке $M(3; -2; 4)$ в направлении нормали $\vec{n}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}.$

Решение. Плотность циркуляции найдётся как проекция ротора на заданное направление, другими словами – как скалярное произведение ротора на единичный вектор заданного направления.

Найдём ротор данного векторного поля в заданной точке:

$$\operatorname{rot}\vec{a}\Big|_{(3;-2;4)}=\left(\frac{\partial(z-2x)}{\partial y}-\frac{\partial(xy)}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial(x+y^2)}{\partial z}-\frac{\partial(z-2x)}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(xy)}{\partial x}-\frac{\partial(x+y^2)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=\left(0-0\right)\vec{i}+\left(0-(-2)\right)\vec{j}+\left(y-2y\right)\vec{k}\Big|_{(3;-2;4)}=2\vec{j}-y\vec{k}\Big|_{(3;-2;4)}=2\vec{j}+2\vec{k}.$$

Найдём единичный вектор заданного направления:

$$\vec{e}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}}{3}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}.$$

Теперь найдём их скалярное произведение:

$$w_{2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}}(3;-2;4)\;=(\vec{e},\operatorname{rot}\vec{a}\big|_{(3;-2;4)})=\left(\left(\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\right),\!\left(2\vec{j}+2\vec{k}\right)\right)=-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: плотность циркуляции данного векторного поля в данной точке в заданном направлении равна $\dfrac{2}{3}$.

Пример 10. Вычислить ротор поля линейных скоростей точек тела, вращающегося вокруг оси, параллельной оси Oz.

Решение. Линейные скорости точек вращающегося тела могут быть найдены как векторное произведение угловой скорости на радиус-вектор:

$$\vec{V}=\left[\vec{\omega},\vec{r}\right],$$

где угловая скорость $\vec{\omega}=\omega\cdot\vec{k},$ а радиус-вектор $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$ Здесь $\vec{i},\vec{j}$ и $\vec{k}$ – орты координатных осей. Найдём векторное поле линейных скоростей:

$$\vec{V}=\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]=[\omega\cdot\vec{k},x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}]=\omega x[\vec{k},\vec{i}]+\omega y[\vec{k},\vec{j}]+\omega z[\vec{k},\vec{k}]=\omega x\vec{j}-\omega y\vec{i}+0.$$

Теперь найдём ротор по формуле (7.4), полагая $P = -\omega y$ и $Q = \omega x$:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\left(0-\frac{\partial(\omega\, x)}{\partial z}\right)-\vec{j}\cdot\left(0+\frac{\partial(\omega\, y)}{\partial z}\right)+\vec{k}\cdot\left(\frac{\partial(\omega\, x)}{\partial x}+\frac{\partial(\omega\, y)}{\partial y}\right).$$

Вычисляя частные производные и выполняя необходимые действия, получим:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = 2\omega\cdot\vec{k}.$$

Ответ: ротор поля линейных скоростей точек вращающегося тела равен по модулю удвоенной угловой скорости и направлен вдоль оси вращения.

Ротор векторного поля может быть использован для расчёта циркуляции по замкнутому контуру. Справедлива следующая теорема:

Теорема. Циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ по любому замкнутому контуру L равна потоку ротора через любую поверхность S, натянутую на этот контур, т. е.

$$Ц_l = \oint_L \left(\vec{a}(M), d\vec{l}\right) = \iint_S \left(\operatorname{rot}\vec{a}(M), d\vec{S}\right). \tag{7.5}$$

Это равенство известно в математике как формула Стокса, она связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру с поверхностным интегралом через любую поверхность, опирающуюся на этот контур. В данном случае она записана интегралами первого рода.

Формула Стокса может быть записана также интегралами второго рода:

$$\oint_L P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz. \tag{7.6}$$

Пример 11. Решить задачу из примера 8, используя для вычисления циркуляции формулу Стокса.

Решение. Циркуляция векторного поля может быть найдена с помощью формулы Стокса (7.5):

$$Ц_l = \iint_S \left(\operatorname{rot}\vec{a}(M), d\vec{S}\right).$$

Сначала найдём ротор по формуле (7.4):

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 5y & 2z & -4y \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\left(\frac{\partial(-4y)}{\partial y} - \frac{\partial(2z)}{\partial z}\right) - \vec{j}\cdot\left(\frac{\partial(-4y)}{\partial x} - \frac{\partial(5y)}{\partial z}\right) + \vec{k}\cdot\left(\frac{\partial(2z)}{\partial x} - \frac{\partial(5y)}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}(-4-2) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-5) = -6\vec{i} - 5\vec{k}.$$

Теперь найдём орт нормали к любой выбранной поверхности, опирающейся на контур, по которому вычисляется циркуляция. Так как контуром является плоский треугольник, то и поверхность выберем в виде плоскости, в которой данный треугольник находится. Нормальный вектор к плоскости легко определяется из её общего уравнения, которое, в свою очередь, мы получим из уравнения плоскости «в отрезках»:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{7} = 1.$$

Умножая обе части уравнения на –84 и перенося все слагаемые в левую часть уравнения, получим общее уравнение плоскости:

$$-28x + 21y + 12z - 84 = 0,$$

отсюда нормальный вектор может быть выражен так:

$$\vec{n} = \pm(-28\vec{i} - 21\vec{j} + 12\vec{k}).$$

Определимся со знаком нормали к плоскости. Отметим, что формула Стокса выводилась с использованием правила «правого винта» относительно направления обхода контура. Для выполнения этого правила нормаль должна образовывать острый угол с осью *Oz* (см. рис. 6.3), т. е. проекция нормали на ось *Oz* должна быть положительной, что выполнится, если перед скобкой взять знак «+». Поделив вектор нормали на его модуль, получим для него орт:

$$\vec{e}_{\vec{n}} = \frac{-28\vec{i} - 21\vec{j} + 12\vec{k}}{\sqrt{28^2 + 21^2 + 12^2}}.$$

Составим интеграл для вычисления циркуляции по формуле Стокса (7.5):

$$Ц_{ABC} = \iint\limits_S \left((-6\vec{i} - 5\vec{k}), \frac{-28\vec{i} - 21\vec{j} + 12\vec{k}}{\sqrt{28^2 + 21^2 + 12^2}}\right) dS,$$

который вычислим согласно формуле (4.5) методом проецирования на одну из координатных плоскостей, а именно – на плоскость *xOy*. Здесь областью *S* по которой ведётся интегрирование, является треугольник ABC. Для представления $dS = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}\, dxdy$ найдём производные из уравнения поверхности (в нашем случае – плоскости) вида $z = z(x; y)$:

$$z = 7 + \frac{7x}{3} + \frac{7y}{4},$$

тогда

$$Ц_{ABC} = \iint_G \left((-6\vec{i} - 5\vec{k}), \frac{(-28\vec{i} - 21\vec{j} + 12\vec{k})}{\sqrt{28^2 + 21^2 + 12^2}} \right) \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 1^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_G \left((-6\vec{i} - 5\vec{k}), \frac{(-28\vec{i} - 21\vec{j} + 12\vec{k})}{\sqrt{28^2 + 21^2 + 12^2}} \right) \sqrt{\frac{28^2 + 21^2 + 12^2}{12^2}}\, dxdy =$$

$$= \frac{1}{12} \iint_G \left((-6\vec{i} - 5\vec{k}), (-28\vec{i} - 21\vec{j} + 12\vec{k}) \right) dxdy = \frac{1}{12} \iint_G ((-6)\cdot(-28) - 5\cdot 12)\, dxdy =$$

$$= \frac{108}{12} \cdot \iint_G dxdy = \frac{108}{12} \cdot S_{\Delta ABO} = \frac{108}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 54.$$

Здесь область интегрирования G – проекция треугольника ABC на плоскость xOy, являющаяся прямоугольным треугольником AOB (см. рис. 6.3). Так как в последнем интеграле по области G подынтегральная функция равна единице, то сам интеграл равен площади области интегрирования, т. е. площади прямоугольного треугольника ABO, которая вычислена как половина произведения катетов.

Ответ: Циркуляция векторного поля по данному треугольнику, вычисленная по формуле Стокса, равна 54 – столько же, сколько и при непосредственном вычислении (см. пример 6).

8. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Некоторые векторные поля имеют такие свойства, из-за которых они получили отдельные названия. К таким «специальным» полям относятся, например, потенциальное и соленоидальное (другое название – «трубчатое»).

Определение. Векторное поле $\vec{a}(M) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ называется *потенциальным*, если существует такая скалярная функция $U = U(x;y;z)$, что во всех его точках выполняется равенство $\vec{a}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\, U(M)$.

В этом случае $U = U(x; y; z)$ называется *потенциальной функцией* (*потенциалом*).

Отметим основные свойства потенциального векторного поля:

потенциальное векторное поле определяется только одной скалярной функцией;

существует бесконечное количество потенциальных функций одного и того же поля, различающихся на константу. Поясним, что градиент, являясь дифференциальным оператором, обнуляет любые константы;

потенциальное векторное поле не имеет вихрей, т. е. $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = 0.$ Это свойство является следствием того, что $\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U(x; y; z)\right) \equiv 0$ для любой скалярной функции $U = U(x; y; z)$;

любое векторное поле, не имеющее вихрей, потенциально.

Исходя из последнего отмеченного свойства потенциальное векторное поле можно определить по-другому:

Определение. Векторное поле $\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$ называется *потенциальным*, если во всех его точках $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = 0.$

Наглядными примерами потенциальных полей являются гравитационные и электростатические поля. Иллюстрацией равенства нулю ротора поля может служить такой факт: если в гравитационном поле тело прошло по замкнутой траектории, то работа поля будет равна нулю. Работа гравитационного поля определяется начальной и конечной потенциальной энергией тела, которую можно отсчитывать от любого уровня (высоты), что, в свою очередь, иллюстрирует второе отмеченное выше свойство потенциальных полей.

Пример 12. По заданной потенциальной функции $U = x^3 \cdot y + z^2 \cdot x$ найти векторное поле, его циркуляцию от точки A(0; 2; 2) до точки B(1; 3; 2) по двум разным путям интегрирования: по дуге параболы $y = x^2 + 2$ в плоскости $z = 2$ и по пространственной прямой, соединяющей эти точки. Сравнить полученные результаты с разностью значений потенциальной функции в этих точках.

Решение. Согласно определению потенциальное векторное поле во всех точках равно градиенту некоторой потенциальной функции. Найдём градиент для заданной потенциальной функции:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = (3x^2 y + z^2 x)\vec{i} + x^3\vec{j} + 2zx\vec{k}.$$

Вычислим циркуляцию по дуге AB как криволинейный интеграл второго рода (6.4):

$$Ц_{AB} = \int\limits_{AB} (3x^2 y + z^2 x)dx + x^3 dy + 2zxdz.$$

Учитывая, что $y = x^2 + 2$, $z = 2$, а $dz = 0$, сведём этот интеграл к определённому, оставляя в подынтегральном выражении только одну переменную x, изменяющуюся от нуля в точке A до единицы в точке B:

$$Ц_{AB} = \int\limits_0^1 (3x^2(x^2+2)+4)dx + x^3 d(x^2+2) = (x^5 + 2x^3 + 4x)\Big|_0^1 = 7.$$

Теперь вычислим циркуляцию по отрезку прямой AB. Чтобы свести криволинейный интеграл к определённому, нам потребуются уравнения этой пространственной прямой для установления явного вида связи переменных. Воспользуемся каноническим видом уравнений пространственной прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

считая координаты точки A первыми, а точки B – вторыми, получим:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-2}{3-2} = \frac{z-2}{2-2} \quad \text{или} \quad x = y - 2 = \frac{z-2}{0}.$$

На этот раз в интеграле

$$Ц_{AB} = \int\limits_{AB} (3x^2 y + z^2 x)dx + x^3 dy + 2zxdz$$

примем, что $x = y - 2$, $z = 2$, а $dz = 0$. Сведём этот интеграл к определённому, оставляя в подынтегральном выражении для примера теперь другую переменную – y, изменяющуюся от двух в точке A до трёх в точке B:

$$Ц_{AB} = \int\limits_2^3 \left(3(y-2)^2 y + 4\right) d(y-2) + (y-2)^3 dy.$$

Раскрывая все скобки, приводя подобные и интегрируя, получим:

$$Ц_{AB} = \int\limits_2^3 (4y^3 - 18y^2 + 24 - 4)dy = (y^4 - 6y^3 + 12y^2 - 4y)\Big|_2^3 = 7.$$

Теперь найдём значения потенциальной функции в точках начала и конца пути интегрирования:

$$U(A)\ =\ x^3\cdot y+z^2\cdot x\Big|_{(0;2;2)}=0^3\cdot 2+2^2\cdot 0=0;$$

$$U(B)\ =\ x^3\cdot y+z^2\cdot x\Big|_{(1;3;2)}=1^3\cdot 3+2^2\cdot 1=7.$$

Разность значений потенциальной функции в точках начала и конца пути интегрирования составит $\Delta U=U(B)-U(A)\ =7-0=7.$

Ответ: Разность значений потенциальной функции векторного поля в точках А и В и циркуляции векторного поля по двум разным траекториям от точки А до точки В оказались одинаковыми и равными 7.

Так как работа потенциального векторного поля по перемещению тела от точки А до точки В может быть выражена и циркуляцией как интеграл второго рода (6.4)

$$Ц_{\breve{AB}}\ =\ \int\limits_{\breve{AB}} P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz,$$

и как разность потенциалов поля в этих точках $\Delta U=U(B)-U(A)$, то их можно приравнять друг к другу:

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x;y;z)dx+Q(x;y;z)dy+R(x;y;z)dz=U(B)-U(A).$$

Имея в виду, что эта работа не зависит от пути интегрирования и выбрав фиксированную точку А(x_0; y_0; z_0) произвольно, а точку В(x; y; z) считая «плавающей», т. е. с переменными координатами, можем найти потенциальную функцию исходя из заданного векторного поля:

$$U(x;y;z)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x;y_0;z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x;y;z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z} R(x;y;z)dz. \qquad (8.1)$$

Для удобства и скорости определения потенциала за фиксированную точку А(x_0; y_0; z_0) обычно принимают начало координат, т. е. точку О(0; 0; 0), при условии, конечно, что она входит в область определения. Выбор любой другой точки начала пути изменит только постоянное слагаемое в потенциале, который и без того определяется лишь с точностью до константы.

П р и м е р 13. Показать, что силовое поле $\vec{F}(M)=y^2\vec{i}+(2xy+3z)\vec{j}+3y\vec{k}$ потенциально, найти его потенциальную функцию, с помощью которой вычислить работу поля по перемещению тела из точки А(1; –2; 4) в точку В(3; 5; –1).

Решение. Согласно одному из определений потенциального поля его ротор должен быть равен нулю. Вычислим ротор данного векторного поля по формуле (7.4):

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & 2xy+3z & 3y\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\left(\frac{\partial(3y)}{\partial y}-\frac{\partial(2xy+3z)}{\partial z}\right)-\vec{j}\cdot\left(\frac{\partial(3y)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2)}{\partial z}\right)+\vec{k}\cdot\left(\frac{\partial(2xy+3z)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2)}{\partial y}\right)=$$

$$=\vec{i}\cdot(3-3)-\vec{j}\cdot(0-0)+\vec{k}\cdot(2y-2y)=0.$$

Убедившись в потенциальности данного силового поля, найдём его потенциал по формуле (8.1), приняв $x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=0$:

$$U(x;y;z)=\int_0^x P(x;0;0)dx+\int_0^y Q(x;y;0)dy+\int_0^z R(x;y;z)dz=$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y 2xydy+\int_0^z 3ydz=xy^2\Big|_0^y+3yz\Big|_0^z=xy^2+3yz.$$

Теперь найдём значения потенциала в точках начала и конца пути перемещения тела:

$$U(A)=x\cdot y^2+3\cdot y\cdot z\,\Big|_{(1;-2;4)}=1\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)\cdot 4=4-24=-22;$$

$$U(B)=x\cdot y^2+3\cdot y\cdot z\,\Big|_{(3;5;-1)}=3\cdot 5^2+3\cdot 5\cdot(-1)=75-15=60.$$

Разность потенциалов функции составит $\Delta U=U(B)-U(A)=60-(-22)=82$.

Ответ: Данное силовое поле потенциально, так как его ротор равен нулю. Потенциальная функция поля $U(x;y;z)=xy^2+3yz+\text{const}$. Работа поля по перемещению тела из точки A(1; –2; 4) в точку B(3; 5; –1), вычисленная как разность потенциалов в этих точках, равна 82.

Другой вид «специального» поля получил название соленоидального.

Определение. Векторное поле $\vec{a}(M)=P(x;y;z)\vec{i}+Q(x;y;z)\vec{j}+R(x;y;z)\vec{k}$ называется *соленоидальным* (трубчатым), если существует такое векторное поле $\vec{b}(M)=b_x(x;y;z)\vec{i}+b_y(x;y;z)\vec{j}+b_z(x;y;z)\vec{k}$, что во всех его точках выполняется равенство $\vec{a}(M)=\operatorname{rot}\vec{b}(M)$. В этом случае $\vec{b}(M)$ называется *векторным потенциалом*.

Для того чтобы векторное поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках дивергенция была равна нулю. Необходимость является следствием того, что $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{b}(M)\right)\equiv 0$ для любого $\vec{b}(M)$.

Исходя из последнего отмеченного свойства соленоидальное векторное поле можно определить по-другому:

Определение. Векторное поле $\vec{a}(M)=P(x;y;z)\vec{i}+Q(x;y;z)\vec{j}+R(x;y;z)\vec{k}$ называется *соленоидальным*, если в нём не существует источников или стоков поля, т. е. $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$.

Основным свойством соленоидальных векторных полей является то, что их векторные линии нигде не начинаются и нигде не заканчиваются, например, они могут быть замкнутыми линиями (вихрями).

Знание структуры векторных полей помогает быстро рассчитывать их потоки и циркуляции. Так, поток соленоидального векторного поля через замкнутую поверхность всегда равен нулю из-за его нулевой дивергенции по формуле Остроградского – Гаусса (5.4), а циркуляция по замкнутому контуру потенциального поля равна нулю из-за нулевого ротора по формуле Стокса (7.5).

В самом общем случае векторное поле $\vec{a}(M)$ имеет не равные нулю как дивергенцию, так и ротор, но оказывается такие векторные поля можно представить как суперпозицию двух полей – потенциального $\vec{a}_n(M)$ и соленоидального $\vec{a}_c(M)$:

$$\vec{a}(M)=\vec{a}_n(M)+\vec{a}_c(M). \tag{8.2}$$

Выражая из уравнения (8.2) соленоидальную составляющую и представляя потенциальную как градиент некоторой скалярной функции, получим:

$$\vec{a}_c(M)=\vec{a}(M)-\vec{a}_n(M)=\vec{a}(M)-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,U(M).$$

Действуя на обе части этого равенства оператором Гамильтона скалярно, слева получим ноль по определению соленоидального поля: $\operatorname{div}\vec{a}_c(M)=0,$ а справа – разность дивергенций:

$$0=\operatorname{div}\vec{a}(M)-\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,U(M)\right).$$

Результат двукратного действия оператора Гамильтона на скалярное поле $U = U(x; y; z)$, а именно градиент дивергенции, называется в математике оператором Лапласа и обозначается символом ∇^2 или Δ, является скаляром и может быть записан с помощью частных производных следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{8.3}$$

Теперь, используя символические обозначения, мы можем записать равенство

$$\Delta U(M) = \operatorname{div} \vec{a}(M), \tag{8.4}$$

известное в математике как уравнение Пуассона, позволяющее выделить сначала потенциальную составляющую данного поля, а затем найти и соленоидальную как разность данного поля и его потенциальной компоненты.

Пример 14. Разложить векторное поле $\vec{a} = x\vec{i} + x\vec{j} + yz\vec{k}$ на потенциальную $\vec{a}_n(M)$ и соленоидальную $\vec{a}_c(M)$ составляющие.

Решение. Для этого поля согласно формуле (5.3)

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = 1 + y,$$

значит, по уравнению Пуассона (8.4)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 1 + y.$$

Теперь найдём любое частное решение, например, $U = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}y^3$, тогда

$$\vec{a}_n = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^3\right) = x\vec{i} + \frac{1}{2}y^2\vec{j},$$

отсюда найдём и соленоидальную составляющую векторного поля

$$\vec{a}_c = \vec{a} - \vec{a}_n = x\vec{i} + y\vec{j} + yz\vec{k} - x\vec{i} - \frac{1}{2}y^2\vec{j} = \left(x - \frac{1}{2}y^2\right)\vec{j} + yz\vec{k}.$$

Ответ: Данное векторное поле может быть представлено как суперпозиция двух полей

$$\vec{a}_n = x\vec{i} + \frac{1}{2}y^2\vec{j} \quad \text{и} \quad \vec{a}_c = \left(x - \frac{1}{2}y^2\right)\vec{j} + yz\vec{k}.$$

Предлагаем самостоятельно убедиться, что в этом случае $\operatorname{rot} \vec{a}_n = 0$ и $\operatorname{div} \vec{a}_c = 0$.

Библиографический список

1. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу : учебник / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. – Москва : Дрофа, 2004. – 642 с. – Текст : непосредственный.

2. Крутицкая, Н. Ч. Математический анализ в вопросах и задачах : учебное пособие / Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин ; под ред. В. Ф. Бутузова. – 4-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2001. – 480 с. – Текст : непосредственный.

3. Сборник задач по высшей математике / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Федина. – 6-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2007. – 592 с. – Текст : непосредственный.

4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 8-е изд. – Москва : Физматлит, 2003. – Т. 3. – 728 с. – Текст : непосредственный.

5. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : учебник : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2004. – Ч. 2. – 464 с. – Текст : непосредственный.

6. Гершанок, В. А. Теория поля : учебник для бакалавров / В. А. Гершанок, Н. И. Дергачев. – Москва : Юрайт, 2019. – 278 с. – Текст : непосредственный.

Учебное издание

ФЁДОРОВ Владимир Алексеевич,
ШВЕД Елена Анатольевна

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор Н. А. Майорова

* * *

Подписано в печать 25.02.2021. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Офсетная печать. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,8.
Тираж 50 экз. Заказ .

* *

Редакционно-издательский отдел ОмГУПСа
Типография ОмГУПСа

*

644046, г. Омск, пр. Маркса, 35